

Objectif. Passer d'un univers, d'un tableau ou d'un arbre à un calcul de probabilité, distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$, puis interpréter une simulation sans confondre fréquence observée et probabilité.

Conseils. Toute loi de probabilité repose sur un modèle explicite. Dans un arbre, vérifier que les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1. Pour un conditionnement, traduire d'abord : « parmi les cas où A est réalisé ». Les exercices *** demandent une prise d'initiative.

A — Réactivation : univers, événements et fréquences

① ★ [REP]

Pour chaque expérience, donner un univers possible :

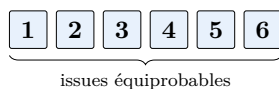
1. lancer une pièce ;
2. lancer un dé à six faces ;
3. relever la couleur d'une bille tirée dans une urne ;
4. choisir au hasard un jour de la semaine.

② ★ [REP, CAL]

On lance le dé équilibré représenté. Décrire les événements :

A : « obtenir un nombre pair » ;

B : « obtenir au moins 5 » ; puis calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(\bar{A})$.



③ ★ [CAL]

Compléter chaque loi.

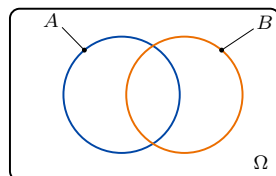
x	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,15	0,25	?	0,10

y	a	b	c
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	?	$\frac{2}{5}$

Vérifier que chaque probabilité est comprise entre 0 et 1.

④ ★ [REP]

Dans l'univers Ω , A et B sont deux événements. Colorier mentalement puis décrire : $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$ et $\bar{A \cup B}$.



⑤ ★ [CAL, REP]

Une urne contient 5 boules rouges, 3 bleues et 2 vertes. On tire une boule au hasard.

1. Justifier l'hypothèse d'équiprobabilité des dix boules.
2. Calculer les probabilités des trois couleurs.
3. Calculer la probabilité de ne pas obtenir une boule rouge.

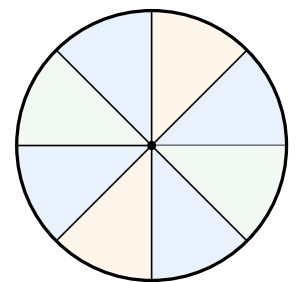
⑥ ★ [REP, COM]

Pour chaque phrase, dire s'il s'agit d'une *issue*, d'un *événement* ou d'une *probabilité* : « obtenir 4 », « obtenir un nombre pair », « $\frac{1}{2}$ », « ne pas obtenir 6 ».

⑦ ★ [CAL, REP]

Une roue équilibrée est partagée en huit secteurs égaux. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. un secteur bleu ;
2. un secteur orange ;
3. un secteur non vert.



⑧ ★★ [CAL, COM]

On sait que $P(A) = 0,37$, $P(B) = 0,22$ et $P(A \cap B) = 0,11$.

1. Calculer $P(\bar{A})$.
2. Calculer $P(A \cup B)$.
3. Interpréter les deux résultats par une phrase.

⑨ ★★ [REP, CAL]

Une population de 200 individus est répartie selon le tableau.

On choisit un individu au hasard. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$.

	B	$\bar{B}$	Total
A	48	72	120
$\bar{A}$	32	48	80
Total	80	120	200

⑩ ★★ [RAI, COM]

Corriger les affirmations fausses.

1. Une probabilité peut valoir 1,2.
2. Si $P(A) = 0,3$, alors $P(\bar{A}) = -0,3$.
3. Une fréquence observée sur 20 essais est toujours égale à la probabilité.
4. Une équiprobabilité se démontre uniquement avec les résultats observés.

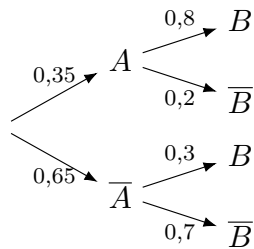
B — Applications : conditionnement et arbres pondérés

⑪ ★ [CAL, REP]

Dans une classe, 14 élèves pratiquent un sport, dont 6 sont internes. Il y a 10 internes au total et 32 élèves. Calculer $P(I)$, $P(S)$, $P(I \cap S)$, $P_I(S)$ et $P_S(I)$.

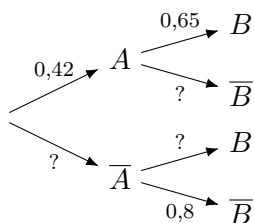
12 ★ [REP, COM]

Lire sur l'arbre : $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P_A(B)$, $P_A(\bar{B})$, $P_{\bar{A}}(B)$. Interpréter $P_A(B)$ par une phrase.



13 ★ [CAL, REP]

Compléter les pondérations manquantes de l'arbre suivant, puis vérifier les sommes aux nœuds.



14 ★★ [CAL, RAI]

Dans l'arbre de l'exercice 12, calculer la probabilité du chemin $A \cap B$, puis celle du chemin $\bar{A} \cap \bar{B}$. Expliquer pourquoi on multiplie les probabilités des branches d'un même chemin.

15 ★★ [REP, CAL]

À partir du tableau d'effectifs, construire un arbre commençant par $A/\bar{A}$. Les probabilités doivent être écrites sous forme fractionnaire puis décimale.

	B	$\bar{B}$	Total
A	18	12	30
$\bar{A}$	14	26	40
Total	32	38	70

16 ★★ [REP, COM]

Dans l'arbre construit à l'exercice 15 :

1. identifier la branche qui porte $P_A(B)$;
2. identifier la branche qui porte $P_{\bar{A}}(\bar{B})$;
3. décrire le chemin correspondant à $A \cap \bar{B}$.

17 ★★ [CAL, REP]

Le tableau décrit 400 tests. On choisit une personne au hasard. Calculer la sensibilité $P_M(T)$, la spécificité $P_{\bar{M}}(\bar{T})$, puis $P_T(M)$.

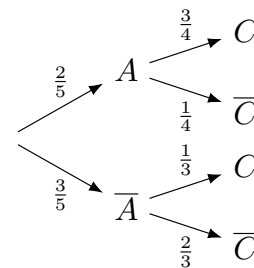
	T	$\bar{T}$	Total
M	72	8	80
$\bar{M}$	32	288	320
Total	104	296	400

18 ★★ [RAI, COM]

À partir de l'exercice 17, expliquer la différence entre : « le test est positif sachant que la personne est malade » et « la personne est malade sachant que le test est positif ». Préciser les dénominateurs.

19 ★★ [REP, CAL]

Une expérience comporte deux étapes. Lire l'arbre et calculer les probabilités des quatre chemins. Ne pas calculer la probabilité d'un événement par sommation de plusieurs chemins.



20 ★★ [CAL, REP]

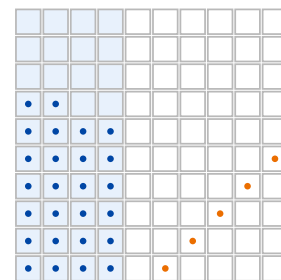
Une loi est donnée par :

x	-2	-1	0	1	2
p_x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,15

Calculer $P(X \geq 0)$, $P(X < 0)$, $P(X \neq 1)$ et vérifier un résultat par l'événement contraire.

21 ★★ [REP, CAL]

Une population est représentée par 100 cases. Les 40 cases bleues forment A ; parmi elles, 26 portent un point. Les points représentent B . Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$.



22 ★★★ [RAI, COM]

Un élève affirme : « puisque $P_A(B) = 0,7$, alors $P_B(A) = 0,7$ ». Construire un tableau d'effectifs sur 100 individus qui fournit un contre-exemple, puis expliquer l'erreur.

C — Approfondissement : modèles, simulation et esprit critique

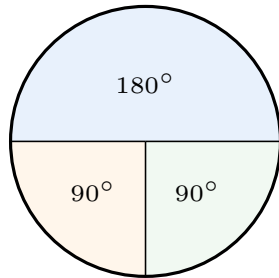
23 ** [RAI, COM]

Pour chaque situation, préciser si l'équiprobabilité est : raisonnable, discutable ou fausse sans information supplémentaire.

1. dé équilibré ;
2. roue dont les secteurs ont des angles différents ;
3. élève choisi au hasard dans une liste complète ;
4. résultat d'un match de football.

24 ** [REP, CAL]

La roue ci-contre n'a pas des secteurs égaux. On choisit comme modèle une probabilité proportionnelle à l'angle. Calculer les probabilités des trois couleurs.

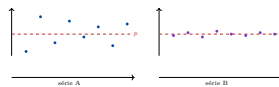


25 ** [RAI, CAL]

Une expérience aléatoire a quatre issues a, b, c, d . Un élève propose $P(a) = 0,2$, $P(b) = 0,4$, $P(c) = 0,5$, $P(d) = -0,1$. Identifier toutes les incompatibilités avec une loi de probabilité, puis proposer une correction possible.

26 ** [REP, RAI]

Deux séries de simulations estiment une probabilité $p = 0,30$. Classer les deux graphiques selon la taille probable de l'échantillon, du plus petit au plus grand, et justifier.



27 ** [CAL, REP]

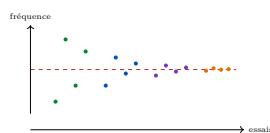
On simule 20 échantillons de taille 50. Les nombres de succès sont :

12	18	14	16	11	20	13	17	15	19
10	16	14	13	18	12	15	17	16	14

Transformer en fréquences, déterminer la fréquence minimale, maximale et moyenne, puis commenter la fluctuation.

28 ** [REP, RAI]

Le nuage représente des fréquences observées pour des tailles $n = 20, 50, 100, 500$. Associer chaque groupe de points à une taille, puis expliquer la tendance générale.



29 ** [RAI, COM]

Deux simulations de 100 essais donnent 27 succès et 36 succès pour un modèle de probabilité 0,30.

1. Calculer les fréquences.
2. Expliquer pourquoi aucune simulation ne « prouve » que $p = 0,30$.
3. Dire si les résultats sont surprenants sans prétendre démontrer.

30 ** [REP, RAI]

Étudier le programme :

```
from random import random
def frequence(n):
    succes = 0
    for k in range(n):
        if random() < 0.4:
            succes = succes + 1
    return succes/n
```

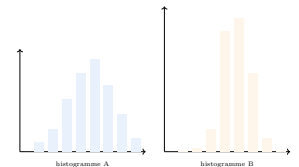
Décrire le modèle, la variable `succes`, le rôle de `n`, puis prévoir ce qui se stabilise quand n augmente.

31 ** [CAL, RAI]

Le programme précédent renvoie successivement : 0,55, 0,34, 0,41, 0,39 pour $n = 20, 100, 1000, 10000$. Associer chaque résultat à la taille la plus plausible et justifier sans conclure qu'un ordre est impossible.

32 *** [REP, RAI]

Les histogrammes représentent 200 fréquences simulées autour de $p = 0,4$. Lequel correspond vraisemblablement à $n = 25$? à $n = 400$? Argumenter par la dispersion.



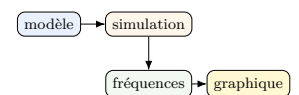
33 *** [RAI, COM]

Un site écrit : « Sur 10 essais, 8 réussites ont été observées ; la probabilité de réussite vaut donc exactement 0,8. » Rédiger une critique en distinguant fréquence observée, estimation et probabilité du modèle.

34 *** [CH, MOD]

Concevoir une simulation permettant d'étudier la fréquence d'apparition d'un 6 avec un dé équilibré. Proposer :

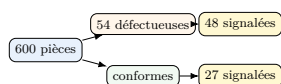
1. un pseudo-code ;
2. les tailles d'échantillons ;
3. une représentation graphique ;
4. une conclusion prudente attendue.



D — Synthèse : huit problèmes contextualisés

35 ★★★ [MOD, CAL, COM]

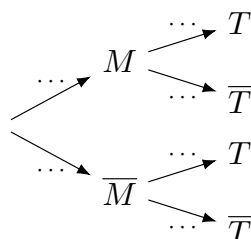
Contrôle qualité. *Données simulées.* Une usine produit 600 pièces, dont 54 défectueuses. Un contrôle signale 48 des pièces défectueuses et 27 pièces conformes.



1. Construire le tableau croisé.
2. Calculer sensibilité, spécificité et probabilité qu'une pièce signalée soit réellement défectueuse.
3. Expliquer pourquoi ces trois nombres répondent à des questions différentes.

36 ★★★ [MOD, REP, RAI]

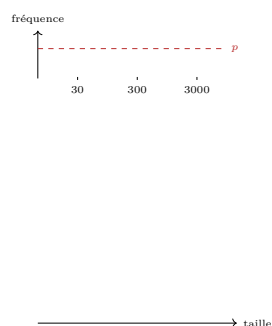
Dépistage. *Données simulées.* Dans une population de 1000 personnes, 50 sont malades. Un test est positif pour 45 malades et 95 non-malades.



1. Compléter un tableau puis un arbre commençant par $M/\bar{M}$.
2. Lire les probabilités conditionnelles sur les branches.
3. Comparer $P_M(T)$ et $P_T(M)$ à partir du tableau.

37 ★★★ [MOD, CAL, COM]

Énergie solaire. *Données simulées.* Un capteur fonctionne correctement avec probabilité 0,92 par journée. On simule des séries de 30, 300 et 3000 jours. Les fréquences observées sont 0,867, 0,913, 0,921.



1. Associer chaque fréquence à une taille plausible.
2. Représenter les trois points.
3. Rédiger une interprétation au regard de la loi des grands nombres.

38 ★★★ [MOD, REP, RAI]

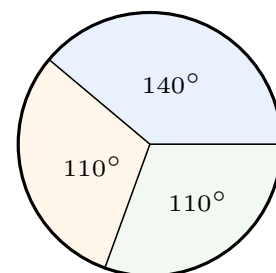
Migration d'oiseaux. *Données simulées.* On équipe 240 oiseaux de deux types de balises. Le tableau donne les retours observés.

	Retour	Non	Total
Type A	84	36	120
Type B	72	48	120
Total	156	84	240

1. Calculer les fréquences de retour selon le type.
2. Si l'on choisit un oiseau au hasard, écrire les probabilités correspondantes.
3. Dire ce que les données permettent ou non d'affirmer sur l'efficacité des balises.

39 ★★★ [CH, MOD, RAI]

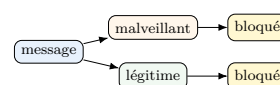
Jeu de foire. Une roue possède les angles indiqués. Le joueur gagne si la flèche s'arrête sur le secteur bleu. Le forain annonce « une chance sur deux ».



1. Proposer un modèle raisonnable.
2. Vérifier l'annonce.
3. Concevoir une simulation pour tester l'ordre de grandeur sur 1000 lancers.

40 ★★★ [MOD, CAL, COM]

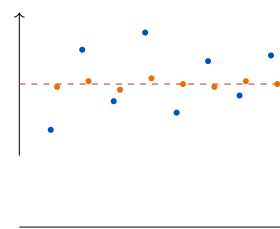
Cybersécurité. *Données simulées.* Un filtre analyse 800 messages. Il bloque 138 des 150 messages malveillants et 26 messages légitimes.



1. Construire le tableau.
2. Calculer $P_M(B)$, $P_{\bar{M}}(\bar{B})$ et $P_B(M)$.
3. Interpréter faux positif et faux négatif dans ce contexte.

41 ★★★ [CH, REP, COM]

Simulation comparée. Deux groupes simulent une pièce équilibrée. Le groupe A effectue 50 lancers par série, le groupe B 1000. Le graphique superpose les fréquences obtenues.



1. Identifier les points de chaque groupe.
2. Expliquer la différence de dispersion.
3. Proposer une conclusion que les deux groupes pourraient signer.

Mini-projet : fiabilité d'un capteur. *Données simulées.* Un capteur annonce « alerte » lorsque la concentration réelle dépasse un seuil. On dispose d'abord des résultats de 20 essais de calibration.

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Seuil dépassé ?	O	N	O	O	N	N	O	N	O	N	O	O	N	N	O	N	O	N	N	O
Alerte ?	O	N	O	N	N	O	O	N	O	N	N	O	N	N	O	N	O	O	N	O

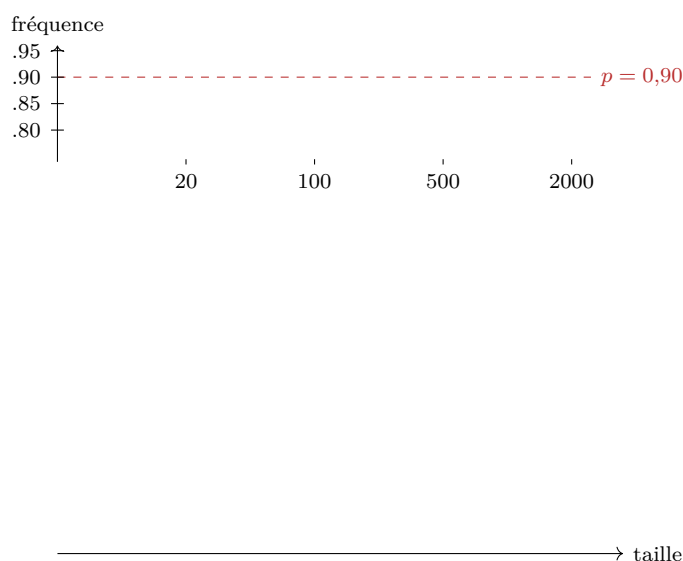
1. Modéliser et organiser

- Définir les événements D : « seuil dépassé » et A : « alerte ».
- Construire le tableau croisé des 20 essais, avec ses marges.
- Identifier dans le tableau un faux positif et un faux négatif.
- Calculer $P_D(A)$, $P_{\bar{D}}(\bar{A})$ et $P_A(D)$.
- Expliquer la différence entre les trois probabilités.

	A	$\bar{A}$	Total
D			
$\bar{D}$			
Total			20

3. Représenter les résultats

Les fréquences simulées sont 0,80, 0,87, 0,906, 0,899. Associer chaque fréquence à une taille plausible, puis placer les points dans le repère.



2. Simuler une calibration plus longue

Compléter le pseudo-code pour simuler un capteur dont la sensibilité vaut 0,90. On suppose ici que l'événement D est réalisé.

```
from random import random
def sensibilite(n):
    alertes = 0
    for k in range(n):
        if ..... :
            alertes = .....
    return .....
```

Prévoir l'allure des fréquences obtenues pour $n = 20, 100, 500, 2000$, puis expliquer ce qui devrait se stabiliser.

4. Conclure avec prudence

Rédiger un paragraphe de six à huit lignes qui distingue :

- le modèle probabiliste choisi ;
- les fréquences observées ;
- la sensibilité du capteur ;
- la spécificité du capteur ;
- la fluctuation d'échantillonnage ;
- ce que la simulation ne démontre pas.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Fil directeur. Une probabilité appartient à un modèle. Une fréquence appartient à un échantillon. Le conditionnement change le groupe de référence ; une simulation éclaire un comportement, mais ne démontre pas une probabilité exacte.