

TD N15 — Géométrie plane : projetés, optimisation, problèmes

Seconde générale et technologique — Semaine 22

Objectif. Réinvestir Pythagore, Thalès, trigonométrie, vecteurs, droites et fonctions pour résoudre des problèmes de géométrie plane. Utiliser le projeté orthogonal, choisir une méthode efficace et optimiser une longueur ou une aire sous contraintes.

Conseils. Commencer par coder la figure et nommer les grandeurs. Pour une optimisation, préciser la variable et son intervalle avant d'écrire la fonction. Les exercices *** demandent une prise d'initiative et une conclusion contextualisée.

A — Réactivation et automatismes géométriques

① ★ [REP, RAI]

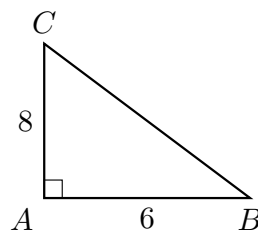
Associer chaque indice à une méthode possible.

Indice	Méthodes proposées
triangle rectangle	Pythagore / trigonométrie
droites parallèles	Thalès / vecteurs
coordonnées données	distance / milieu / déterminant
longueur minimale	projeté orthogonal
grandeur variable x	fonction / variations

Pour deux lignes, citer une autre méthode envisageable et expliquer pourquoi elle serait moins directe.

② ★ [CAL]

Dans chaque triangle rectangle, calculer la longueur manquante.

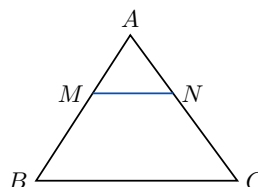


- ABC est rectangle en A , $AB = 6$, $AC = 8$: calculer BC .
- DEF est rectangle en F , $DE = 13$, $DF = 5$: calculer EF .
- GHI est rectangle en G , $GH = 7$, $GI = 9$: calculer HI .

Donner une valeur exacte puis, si nécessaire, une valeur approchée au dixième.

③ ★ [CAL, REP]

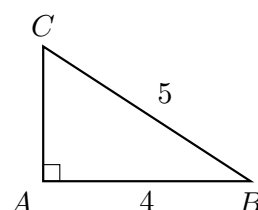
Dans la configuration ci-contre, $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AM = 3$, $AB = 7,5$, $AN = 4$ et $BC = 10$. Calculer AC puis MN .



④ ★ [CAL]

Le triangle ABC est rectangle en A .

- Calculer $\cos(\widehat{B})$.
- En déduire $\widehat{B}$ au degré près.
- Calculer $\widehat{C}$.



⑤ ★ [CAL, RAI]

Dans un repère, calculer le déterminant de chaque couple de vecteurs et conclure sur leur colinéarité :

$$\vec{u}(3; 2), \vec{v}(9; 6); \quad \vec{a}(-4; 5), \vec{b}(8; -10);$$

$$\vec{r}(2; -3), \vec{s}(5; -7).$$

⑥ ★ [REP, CAL]

On considère les droites

$$(d_1) : y = 2x - 3, \quad (d_2) : 2x - y + 3 = 0,$$

$$(d_3) : y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Déterminer lesquelles sont confondues ou parallèles. Vérifier si $A(2; 1)$ appartient à chacune.

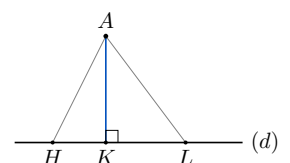
⑦ ★ [CAL]

Calculer :

- l'aire d'un triangle de base 8 cm et de hauteur 5,5 cm ;
- l'aire d'un trapèze de bases 4 cm et 10 cm, de hauteur 6 cm ;
- la longueur d'un cercle de rayon 3 cm puis l'aire du disque.

⑧ ★ [REP, RAI]

Parmi H , K et L , identifier le projeté orthogonal de A sur (d) . Justifier avec le codage, puis distinguer le *point projeté* de la *distance à la droite*.



⑨ ★★ [RAI, COM]

Déterminer l'intervalle possible pour la variable x .

- x est un côté d'un rectangle de périmètre 36.
- x est la distance d'un point M à A , avec $M \in [AB]$ et $AB = 7$.
- x est le rayon d'un disque contenu dans un carré de côté 10.
- x est l'abscisse d'un point se déplaçant sur $[-3; 5]$.

⑩ ★★ [CH, RAI, COM]

Pour chaque demande, annoncer une méthode avant tout calcul :

- prouver que trois points repérés sont alignés ;
- calculer la hauteur d'un bâtiment à partir d'un angle de visée ;

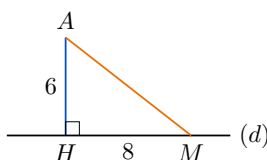
- trouver le point d'une droite le plus proche d'un point fixe ;
- maximiser l'aire d'un rectangle de périmètre imposé ;
- calculer une longueur dans une figure comportant deux parallèles.

B — Applications : projetés, longueurs et choix de méthode

11 ★ [CAL, REP]

H est le projeté orthogonal de A sur (d) . On donne $AH = 6$ cm et $HM = 8$ cm.

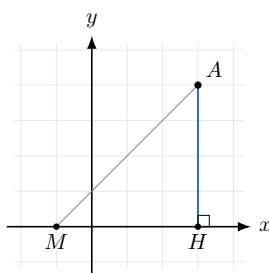
- Calculer AM .
- Comparer AM et AH .
- Expliquer pourquoi H est plus proche de A que M .



12 ★ [CAL, REP]

Dans le repère, $A(3;4)$ et $H(3;0)$.

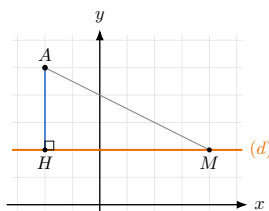
- Montrer que H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.
- Calculer la distance de A à cet axe.
- Calculer AM pour $M(-1;0)$.



13 ★★ [CAL, RAI]

On donne $A(-2;5)$ et la droite $(d) : y = 2$.

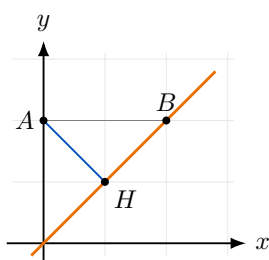
- Déterminer le projeté H de A sur (d) .
- Calculer AH .
- Pour $M(4;2)$, vérifier que $AM > AH$.



14 ★★ [RAI, CAL]

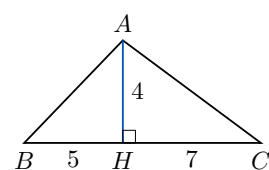
Dans un repère, $A(0;3)$, $H(1;2)$ et $B(2;3)$. La droite (d) passe par H et B .

- Vérifier que $H \in (d)$.
- Calculer AH^2 , HB^2 et AB^2 .
- Conclure que H est le projeté de A sur (d) .



15 ★ [CAL, REP]

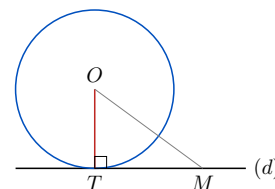
Dans le triangle ABC , H est le pied de la hauteur issue de A . On donne $BH = 5$, $HC = 7$ et $AH = 4$. Calculer AB , AC , BC et l'aire du triangle.



16 ★★ [RAI, CAL]

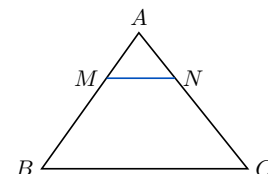
Le cercle de centre O est tangent à la droite (d) en T . On donne $OT = 3$ cm et $TM = 4$ cm.

- Justifier que $OT \perp (d)$.
- Calculer OM .
- Quel est le point de (d) le plus proche de O ?



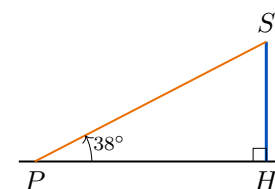
17 ★★ [CAL, RAI]

Dans le triangle ABC , $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 10$ et $AM = 8$. Calculer AN et MN , puis le périmètre de AMN .



18 ★★ [CAL, MOD]

Depuis l'œil d'un observateur placé en P , on observe le sommet S d'un mât sous un angle de 38° . Le point H du mât situé à la hauteur de l'œil vérifie $PH = 22$ m.



- Écrire une relation trigonométrique.
- Calculer HS , la hauteur du sommet au-dessus de l'œil, au dixième.
- En déduire la hauteur du mât en ajoutant une hauteur d'œil de 1,60 m.

19 ★★ [CAL, RAI]

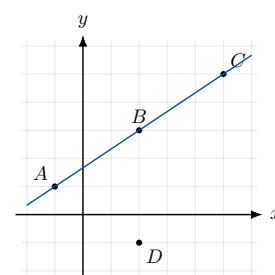
Dans un repère, $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(6;0)$ et $D(1;-3)$.

- Calculer $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$.
- Calculer $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$.
- Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Ses diagonales sont-elles de même longueur ?

20 ★★ [CAL, REP]

Dans le repère, $A(-1;1)$, $B(2;3)$, $C(5;5)$ et $D(2;-1)$.

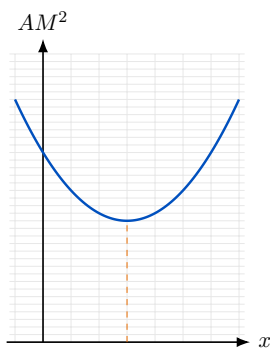
- Prouver que A , B , C sont alignés.
- Déterminer une équation de (ABC) .
- Calculer la distance BD .



21 ** [MOD, CAL, REP]

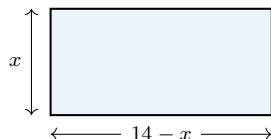
Le point $M(x; 0)$ se déplace sur l'axe des abscisses et $A(3; 4)$.

1. Exprimer AM^2 en fonction de x .
2. Compléter le graphique de $x \mapsto AM^2$.
3. Déterminer la position minimisant AM .
4. Relier le résultat au projeté orthogonal.



22 ** [MOD, CAL]

Un rectangle a pour périmètre 28 cm. Sa largeur est x .



1. Exprimer sa longueur et son aire $A(x)$.
2. Déterminer l'intervalle possible pour x .
3. Compléter le tableau de variations.
4. Donner les dimensions d'aire maximale.

x	0	7	14
$A(x)$	0	49	0

C — Approfondissement : combiner les méthodes et optimiser

23 ** [CH, RAI, COM]

Choisir une méthode principale et une méthode de contrôle pour chacune des situations :

1. montrer qu'un quadrilatère repéré est un parallélogramme ;
2. déterminer la distance d'un point à une droite horizontale ;
3. calculer une longueur dans un triangle contenant une parallèle ;
4. maximiser l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle ;
5. prouver qu'une droite est tangente à un cercle.

Présenter les réponses dans un tableau « objectif / méthode / contrôle ».

24 ** [RAI, COM]

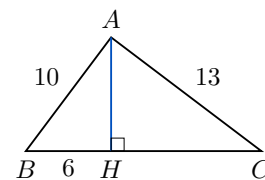
Un élève affirme : « H appartient à (d) , donc H est le projeté orthogonal de A sur (d) . »

1. Expliquer l'erreur.
2. Ajouter la condition manquante.
3. Construire une figure donnant un contre-exemple.
4. Reformuler une preuve correcte en deux phrases.

25 ** [CAL, RAI]

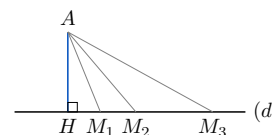
Dans le triangle ABC , $AH \perp BC$. On donne $AB = 10$, $AC = 13$ et $BH = 6$.

1. Calculer AH .
2. Calculer HC , puis BC .
3. Déterminer l'aire de ABC .
4. Vérifier la cohérence de la figure.



26 *** [CH, RAI]

Un point A est à 5 cm d'une droite (d) . On place trois points M_1, M_2, M_3 sur (d) , à des distances horizontales 2, 4 et 7 cm du projeté H .

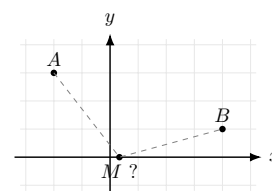


1. Classer AM_1, AM_2, AM_3 sans calcul exact.
2. Calculer ces trois longueurs.
3. Généraliser pour un point M tel que $HM = x$.

27 ** [MOD, CAL, RAI]

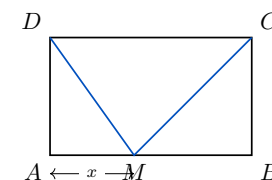
Le point $M(x; 0)$ est sur l'axe des abscisses. On donne $A(-2; 3)$ et $B(4; 1)$.

1. Exprimer MA^2 et MB^2 .
2. Résoudre $MA = MB$ sans racines carrées.
3. Placer le point obtenu et vérifier graphiquement.



28 ** [MOD, REP, CAL]

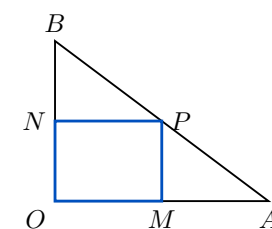
Dans le rectangle $ABCD$, $AB = 10$, $AD = 6$. Le point M appartient à $[AB]$ et $AM = x$.



1. Exprimer les aires de ADM et MBC .
2. Résoudre l'égalité de ces deux aires.
3. Interpréter géométriquement le point obtenu.

29 *** [MOD, CAL, RAI]

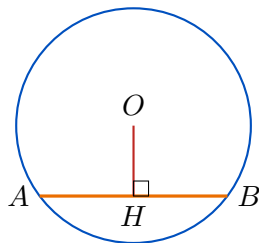
Dans le triangle rectangle OAB , $OA = 8$ et $OB = 6$. Un rectangle $OMPN$ a son sommet P sur $[AB]$, avec $OM = x$.



1. À l'aide de Thalès, exprimer ON en fonction de x .
2. Établir $A(x) = x \left(6 - \frac{3}{4}x\right)$.
3. Mettre $A(x)$ sous la forme $-\frac{3}{4}(x - 4)^2 + 12$.
4. Déterminer le rectangle d'aire maximale.

30 ** [CAL, RAI]

Dans un cercle de centre O et de rayon 5 cm, une corde $[AB]$ est à 3 cm de O . Le point H est le projeté de O sur (AB) .



1. Justifier que H est le milieu de $[AB]$.
2. Calculer AH , puis AB .
3. Comparer avec le diamètre.

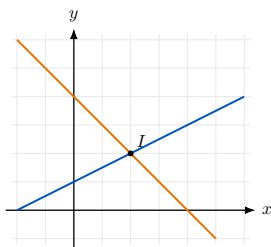
31 *** [CAL, REP, RAI]

Dans un repère, $A(-3; 0)$, $B(1; 4)$, $C(5; 0)$ et $D(1; -4)$.

1. Démontrer que $ABCD$ est un carré sans utiliser une figure à l'échelle.
2. Déterminer les équations de ses diagonales.
3. Identifier le projeté de A sur (BD) .
4. Calculer la distance de A à (BD) .

32 ** [CAL, RAI]

On considère $(d_1) : y = \frac{1}{2}x + 1$ et $(d_2) : y = -x + 4$.



1. Calculer leur point d'intersection I .
2. Choisir deux points $A \in (d_1)$ et $B \in (d_2)$ d'abscisse 0.
3. Calculer AI , BI et AB .
4. Le triangle AIB est-il rectangle?

33 *** [RAI, COM]

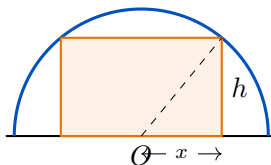
Un élève étudie un rectangle de périmètre 20 cm et écrit :

$$A(x) = x(20 - x), \quad 0 < x < 20.$$

1. Repérer les deux erreurs de modélisation.
2. Corriger la fonction et son domaine.
3. Construire le tableau de variations correct.
4. Formuler la conclusion dans le contexte.

34 *** [CH, MOD, REP]

Un rectangle est inscrit dans un demi-disque de rayon 5, sa base étant portée par le diamètre. La demi-largeur vaut x .



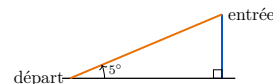
1. Exprimer la hauteur avec Pythagore.
2. Écrire l'aire en fonction de x .
3. À la calculatrice, dresser un tableau pour $x = 0, 0,5, \dots, 5$.
4. Conjecturer les dimensions optimales et contrôler graphiquement.

Aucune formule générale du second degré n'est attendue.

D — Problèmes contextualisés et prises d'initiative

35 *** [MOD, CAL, COM]

Rampe d'accès. Une entrée est située 0,72 m au-dessus du sol. La pente réglementaire retenue ne doit pas dépasser un angle de 5° .

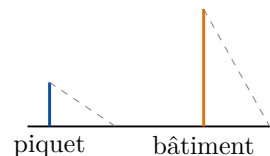


1. Modéliser par un triangle rectangle.
2. Calculer la longueur horizontale minimale.
3. Calculer la longueur de la rampe.
4. Conclure au centimètre près.

36 *** [MOD, CAL, REP]

Ombres et panneau solaire.

Au même instant, un piquet de 1,5 m projette une ombre de 2 m. L'ombre d'un bâtiment mesure 18 m.

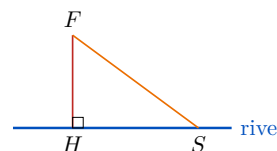


1. Justifier l'utilisation de Thalès.
2. Calculer la hauteur du bâtiment.
3. Un panneau placé dans l'axe de l'ombre, à 12 m derrière le bâtiment, est-il encore dans l'ombre?

37 *** [MOD, CH, COM]

Conduite vers une rivière.

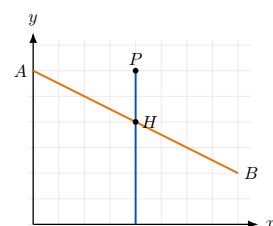
Une ferme F se trouve à 240 m d'une rive rectiligne. Le projeté H de F sur la rive est à 320 m d'une station S .



1. Calculer FS .
2. Comparer deux conduites : vers H , puis vers S .
3. Expliquer pourquoi la conduite la plus courte vers la rive arrive en H .
4. Chiffrer l'économie de longueur.

38 *** [MOD, CAL, RAI]

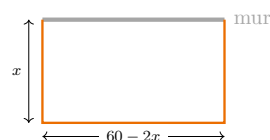
Téléphérique. Le câble est modélisé par la droite passant par $A(0; 6)$ et $B(8; 2)$. Un pylône a pour sommet $P(4; 6)$.



1. Déterminer une équation du câble.
2. Trouver le point $H(4; 4)$ situé verticalement sous P sur le câble.
3. Calculer PH .
4. Cette longueur est-elle la distance de P au câble? Justifier.

39 *** [MOD, CAL, REP]

Enclos contre un mur. Un éleveur dispose de 60 m de clôture pour trois côtés d'un rectangle, le quatrième étant un mur.



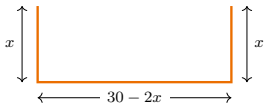
1. Poser x pour la largeur perpendiculaire au mur.

- Exprimer la longueur et l'aire $A(x)$.
- Déterminer le domaine de x .
- Construire le tableau de variations et donner les dimensions optimales.

x	0	15	30
$A(x)$	0	450	0

40 *** [MOD, CAL, CH]

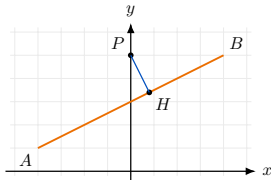
Gouttière pliée. Une bande métallique de 30 cm est pliée à angle droit, avec deux rebords de largeur x .



- Exprimer la largeur du fond.
- Écrire l'aire de la section $S(x)$.
- Déterminer le domaine.
- Trouver la valeur de x qui maximise la capacité par mètre.
- Comparer avec $x = 5$ cm.

41 *** [MOD, RAI, COM]

Trajectoire d'un drone. Le drone suit la droite (d) passant par $A(-4;1)$ et $B(4;5)$. Une balise est en $P(0;5)$.

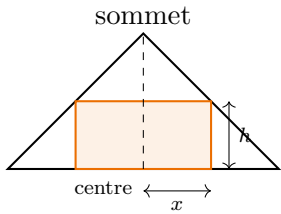


- Déterminer une équation de (d) .
- Vérifier que $H(0,8;3,4)$ appartient à (d) .
- Calculer PH^2 , HA^2 et PA^2 , puis prouver que $PH \perp (d)$.
- En déduire la distance minimale de la balise à la trajectoire.

42 *** [MOD, CH, CAL]

Scène sous un chapiteau.

La section du toit est un triangle isocèle de base 12 m et de hauteur 6 m. Une scène rectangulaire, centrée, touche les deux pans du toit. Sa demi-largeur vaut x .



- Utiliser Thalès pour exprimer la hauteur disponible $h(x)$.
- Établir $A(x) = 2x(6 - x)$.
- Déterminer le domaine et le maximum de A .
- Donner les dimensions optimales et vérifier qu'elles respectent les contraintes.
- Proposer une seconde méthode de contrôle.

Bilan de stratégie — problèmes 35 à 42. Pour quatre problèmes au choix, résumer la démarche avant de consulter une correction.

Ex.	Variable ou grandeur	Contraintes / domaine	Outil principal	Conclusion contextualisée