

TD N13 — Équations et inéquations avec fonctions

Seconde générale et technologique — Semaines 19–20

Objectif. Choisir entre lecture graphique, calcul exact et approximation numérique pour résoudre $f(x) = k$, $f(x) = g(x)$ ou une inéquation. Construire et exploiter le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient en contrôlant l'ensemble de définition.

Conseils. Pour un quotient, commencer par les valeurs interdites. Une lecture graphique est souvent approchée. Toute résolution rédigée se termine par un ensemble de solutions $\mathcal{S}$. Les exercices *** demandent une prise d'initiative.

A — Réactivation et automatismes

1 ★ [REP, COM]

Associer chaque écriture à une interprétation.

Écriture	Interprétations proposées
1. $f(3) = 5$	a. intersection de deux courbes
2. $f(x) = 0$	b. position sous l'axe des abscisses
3. $f(x) = g(x)$	c. image de 3
4. $f(x) < 0$	d. intersection avec l'axe des abscisses

Écrire les associations, puis reformuler chacune par une phrase.

2 ★ [CAL]

Factoriser.

- a) $x^2 - 5x$, b) $3x^2 + 6x$,
 c) $x^2 - 9$, d) $4x^2 - 25$,
 e) $x^2 + x - 6$, f) $2x^2 - 8x + 8$.

3 ★ [CAL]

Résoudre dans $\mathbb{R}$, par équivalences.

- a) $3x - 7 = 5$, b) $5 - 2x \leq 11$,
 c) $4x + 1 > 2x - 5$, d) $7 - 3x = 2x + 12$.

4 ★ [CAL]

Résoudre.

$$(x - 4)(x + 1) = 0, \quad x(3x - 6) = 0,$$

$$(2x + 5)(x - 3) = 0.$$

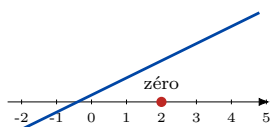
Pour chaque équation, conclure par $\mathcal{S} = \dots$.

5 ★ [REP, CAL]

On considère la fonction affine

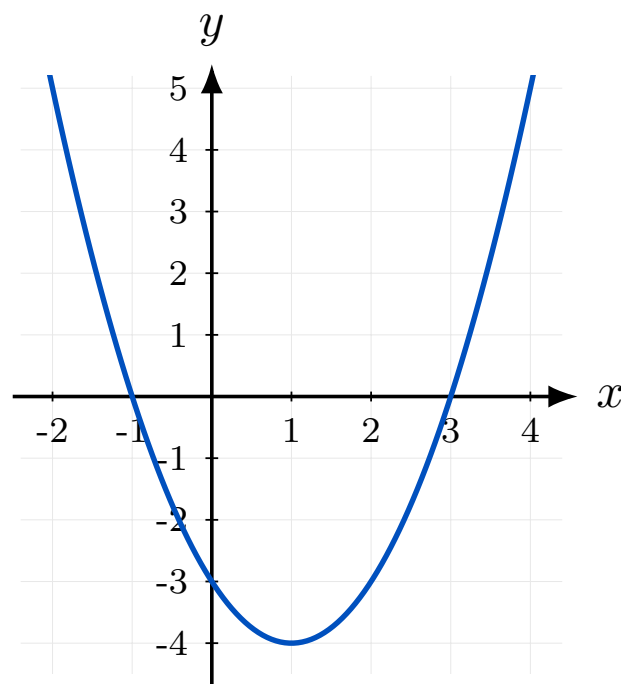
$$u : x \mapsto 2x - 4.$$

- Déterminer son zéro.
- Lire sur la droite le signe de $u(x)$.
- Compléter un tableau de signes.



6 ★ [REP]

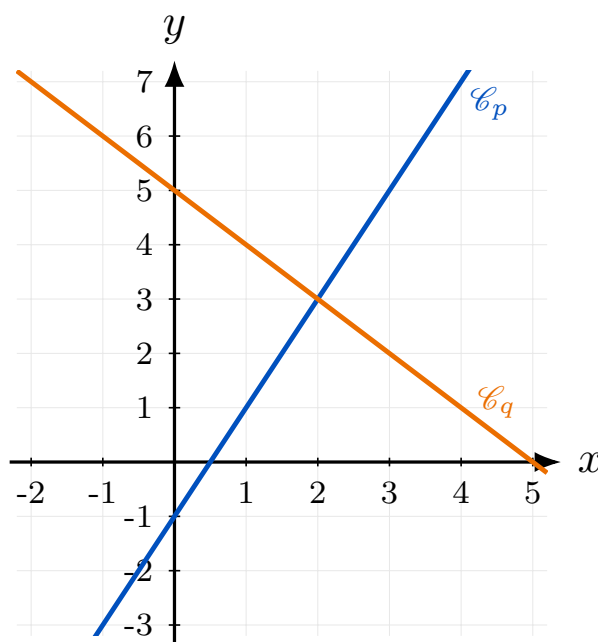
La courbe représente $f : x \mapsto (x - 1)^2 - 4$.



Résoudre graphiquement $f(x) = 0$, $f(x) = -3$, puis $f(x) < 0$.

7 ★ [REP, RAI]

Les droites représentent $p : x \mapsto 2x - 1$ et $q : x \mapsto -x + 5$.



Résoudre graphiquement $p(x) = q(x)$, puis $p(x) < q(x)$. Vérifier par le calcul.

8 ★ [CAL, REP]

Résoudre à l'aide de la distance à un nombre.

$$|x - 3| = 2, \quad |x + 1| \leq 4, \quad |2x - 6| < 4.$$

Représenter chaque ensemble de solutions sur une droite graduée.

9 ★ [CAL, RAI]

Déterminer l'ensemble de définition.

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \frac{x+2}{x-3}, \\ g : x &\mapsto \frac{2x-1}{(x+1)(x-4)}, \\ h : x &\mapsto \frac{1}{x^2-9}. \end{aligned}$$

Écrire chaque réponse comme un ensemble ou une réunion d'intervalles.

10 ★★ [RAI, COM]

Pour chaque question, choisir d'abord la méthode la plus adaptée :

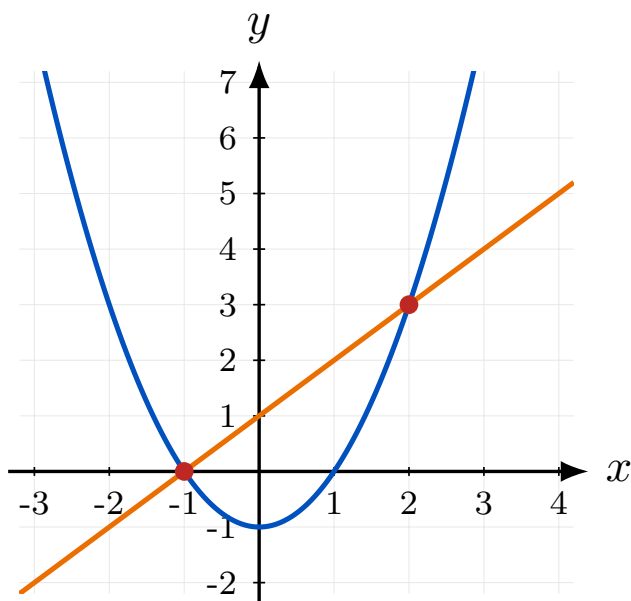
$$\begin{aligned} x^2 &= 25, & x^2 - x - 6 &= 0, \\ x^2 &= 2, & f(x) &= g(x). \end{aligned}$$

lorsque seules les courbes de f et g sont disponibles. Justifier les choix : calcul exact, lecture graphique ou approximation numérique.

B — Applications : intersections, produits et quotients

11 ★ [REP, CAL]

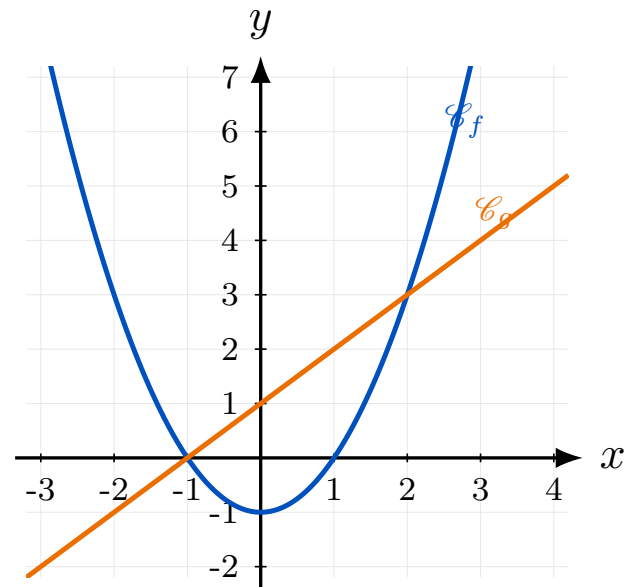
On considère $f : x \mapsto x^2 - 1$ et $g : x \mapsto x + 1$.



Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$, puis retrouver exactement les solutions par factorisation.

12 ★ [REP, RAI]

Avec les mêmes fonctions f et g , résoudre $f(x) \leq g(x)$.

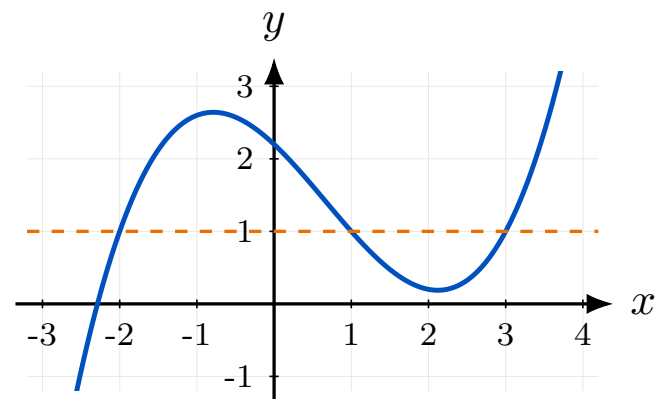


Colorier mentalement la zone où $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$, puis vérifier avec le signe de $f(x) - g(x)$.

13 ★★ [REP, RAI]

La courbe représente

$$r : x \mapsto 0,2(x+2)(x-1)(x-3) + 1.$$



Résoudre $r(x) = 1$, puis $r(x) > 1$. Expliquer le lien avec le signe du produit $(x+2)(x-1)(x-3)$.

14 ★ [CAL]

Résoudre exactement.

$$x^2 = 9, \quad (x-2)^2 = 16, \quad |x+1| = 3, \quad x^2 < 16.$$

15 ★★ [CAL, RAI]

Résoudre en faisant apparaître un produit nul.

- $x^2 = x + 6$,
- $(x-1)(x+4) = 2(x+4)$,
- $x^2 - 4x = 5x - 20$,
- $(2x-3)^2 = (x+1)(2x-3)$.

16 ★ [REP, CAL]

Construire le tableau de signes de $A(x) = (x+2)(x-5)$, puis résoudre $A(x) \geq 0$.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x+2$				
$x-5$				
$A(x)$				

17 ** [CAL, REP]

Résoudre à l'aide de tableaux de signes.

- a) $(x - 3)(x + 4) > 0$,
- b) $(2x + 1)(x - 5) \leq 0$,
- c) $(4 - x)(x + 2) \geq 0$,
- d) $x(7 - 2x) < 0$.

18 ** [CAL, RAI]

Étudier le signe de $B(x) = x(x - 2)(x + 3)$, puis résoudre $B(x) < 0$.

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
x					
$x - 2$					
$x + 3$					
$B(x)$					

19 * [CAL, REP]

Résoudre

$$\frac{x - 1}{x + 3} \leq 0.$$

Déterminer d'abord la valeur interdite, puis compléter le tableau.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x - 1$				
$x + 3$				
$Q(x)$				

20 ** [CAL, RAI]

Résoudre.

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x - 4} > 0, & \quad \frac{3 - x}{x + 1} \geq 0, \\ \frac{2x - 6}{x + 5} < 0, & \quad \frac{x}{2x - 1} \leq 0. \end{aligned}$$

Faire apparaître les valeurs interdites dans les tableaux.

21 * [CAL, COM]

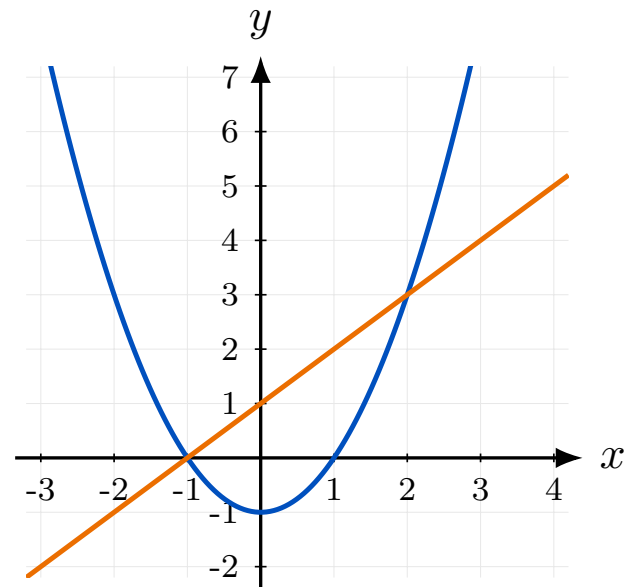
Résoudre les équations en précisant le domaine.

$$\frac{x - 4}{x + 2} = 0, \quad \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 5} = 0, \quad \frac{x + 1}{x + 1} = 0.$$

La troisième équation a-t-elle une solution ? Expliquer.

22 ** [REP, RAI]

On reprend $f : x \mapsto x^2 - 1$, $g : x \mapsto x + 1$, et on pose $h = f - g$.



Sans calculer d'abord $h(x)$, donner son signe à partir de la position relative des courbes. Vérifier ensuite en factorisant $h(x)$.

C — Choisir, raisonner, approfondir

23 ** [REP, RAI]

Le tableau donne le signe d'une expression $A(x)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Résoudre $A(x) \geq 0$, $A(x) < 0$, puis $\frac{1}{A(x)} \leq 0$. Préciser le domaine dans la dernière question.

24 ** [RAI, COM]

Trois élèves ont écrit :

- $\frac{x + 1}{x - 2} \geq 0 \iff x + 1 \geq 0$.
- $\frac{x - 3}{x + 4} \leq 0$, donc $\mathcal{S} = [-4; 3]$.
- Une courbe coupe l'axe près de 1,41, donc la solution exacte est $\sqrt{2}$.

Identifier précisément chaque erreur, puis proposer une correction.

25 ** [REP, CAL, COM]

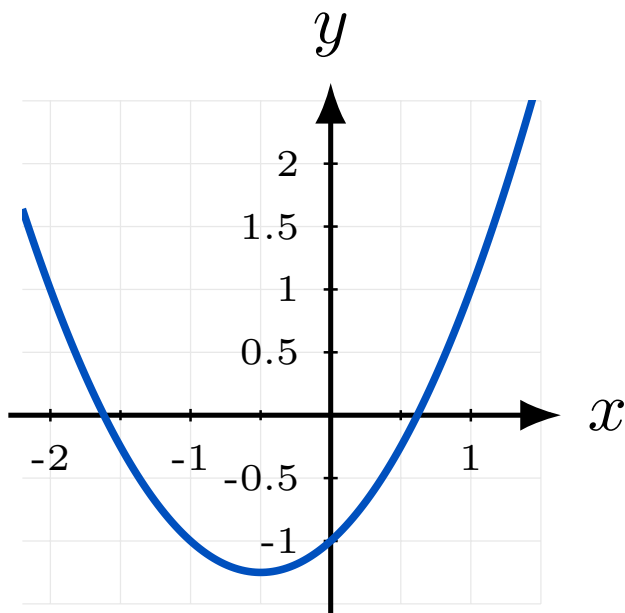
Résoudre $x^2 = x + 2$ de deux façons :

- par lecture graphique sur un repère que vous construirez ;
- par factorisation.

Comparer la précision, la rapidité et la portée des deux méthodes.

26 ** [REP, CAL]

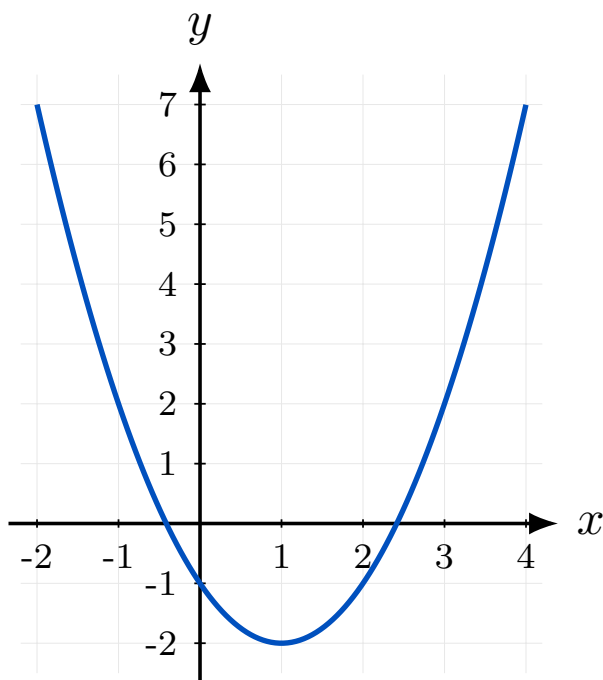
On cherche les solutions de $x^2 + x - 1 = 0$.



Encadrer chaque solution entre deux dixièmes consécutifs, puis entre deux centièmes consécutifs à l'aide d'une table de valeurs.

27 ** [REP, RAI]

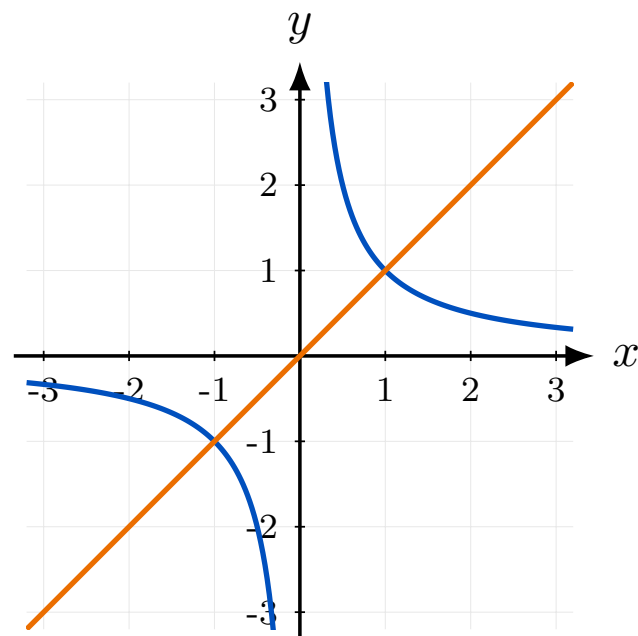
Sur $[-2; 4]$, on considère $f : x \mapsto (x - 1)^2 - 2$.



Selon la valeur du réel k , déterminer le nombre de solutions de $f(x) = k$ dans $[-2; 4]$. Présenter la réponse par cas.

28 ** [REP, CAL, RAI]

On considère $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x$.



Résoudre $f(x) = g(x)$, puis $f(x) > g(x)$. Comparer lecture graphique et tableau de signes de $\frac{1 - x^2}{x}$.

29 ** [CAL, REP]

Résoudre

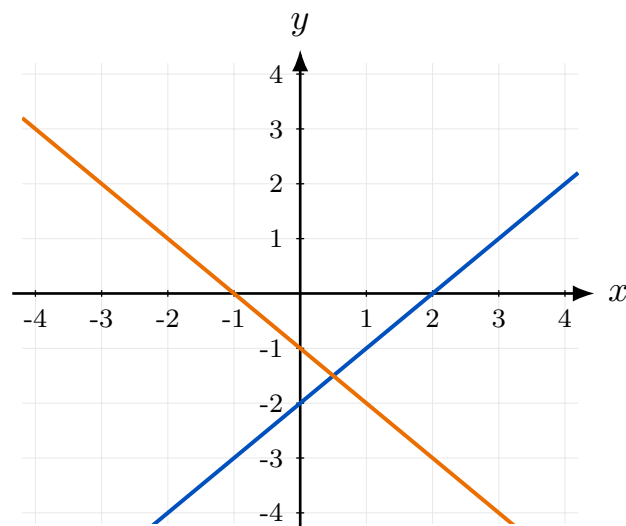
$$\frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 1} \geq 0.$$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$x + 2$					
$x - 3$					
$x - 1$					
$Q(x)$					

Faire apparaître clairement le zéro, la valeur interdite et les bornes incluses.

30 ** [REP, RAI]

Les droites représentent $p : x \mapsto x - 2$ et $q : x \mapsto -x - 1$.



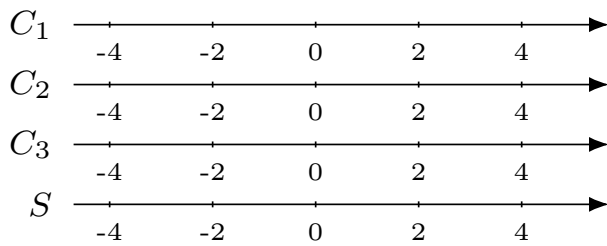
Sans écrire immédiatement les formules, déterminer le signe de $\frac{p(x)}{q(x)}$. Vérifier ensuite par un tableau.

31 ** [REP, RAI]

Un réel x doit vérifier

$$x \in [-4; 5], \quad (x + 1)(x - 3) \leq 0, \quad x \neq 2.$$

Représenter séparément les contraintes, puis donner leur intersection.



32 *** [CH, REP, RAI]

Construire deux expressions factorisées $P(x)$ et $Q(x)$ ayant pour zéros -2 et 4 , telles que :

- $P(x)$ soit positif à l'extérieur de $[-2; 4]$;
- $Q(x)$ soit positif à l'intérieur de $[-2; 4]$.

Tracer leurs tableaux de signes et expliquer le rôle d'un facteur constant négatif.

33 *** [RAI, COM]

Soient $a < b$. Justifier, par disjonction de cas, que

$$(x - a)(x - b) \geq 0$$

exactement lorsque $x \leq a$ ou $x \geq b$. La rédaction doit traiter les trois zones $x < a$, $a < x < b$ et $x > b$, puis les deux zéros.

34 *** [CH, REP, RAI]

On cherche une solution de $x^3 + x - 1 = 0$ dans $[0; 1]$ par dichotomie.

a=0 ; b=1 répéter 10 fois m=(a+b)/2 si f(a)*f(m)<=0 : b=m sinon : a=m	intervalle initial milieu
---	----------------------------------

Effectuer les trois premières étapes. Expliquer comment le test conserve un sous-intervalle dont les images aux bornes ont des signes opposés ; on admet qu'il contient la solution. Estimer ensuite la précision après dix étapes.

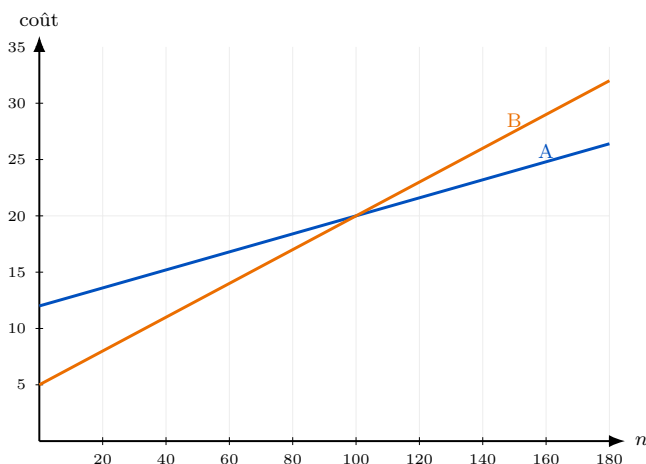
D — Problèmes, modélisation et prises d'initiative

35 *** [MOD, CAL, COM]

Deux forfaits mobiles. Pour n minutes hors forfait,

$$A(n) = 12 + 0,08n, \quad B(n) = 5 + 0,15n$$

en euros.

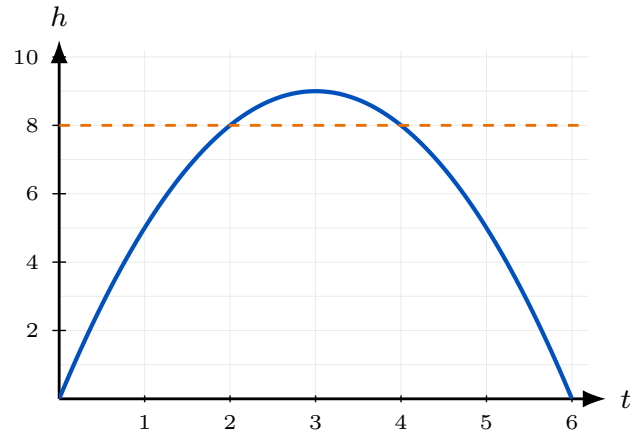


Déterminer le seuil d'égalité, puis préciser pour quels nombres entiers de minutes chaque forfait est le moins cher. Expliquer l'effet de l'arrondi à la minute.

36 *** [MOD, REP, CAL]

Trajectoire d'un ballon. Sa hauteur, en mètres, est modélisée sur $[0; 6]$ par

$$h(t) = -t(t - 6).$$



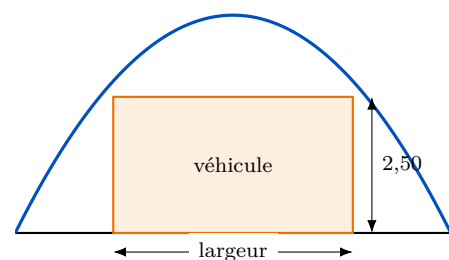
Déterminer exactement pendant quel intervalle la hauteur est au moins 8 m. Donner la durée correspondante et interpréter les bornes.

37 *** [MOD, CH, COM]

Gabarit d'un tunnel. La voûte est modélisée par

$$v(x) = 4 - \frac{x^2}{4} \quad (-4 \leq x \leq 4).$$

Un véhicule rectangulaire mesure 2,50 m de haut et est centré sous la voûte.



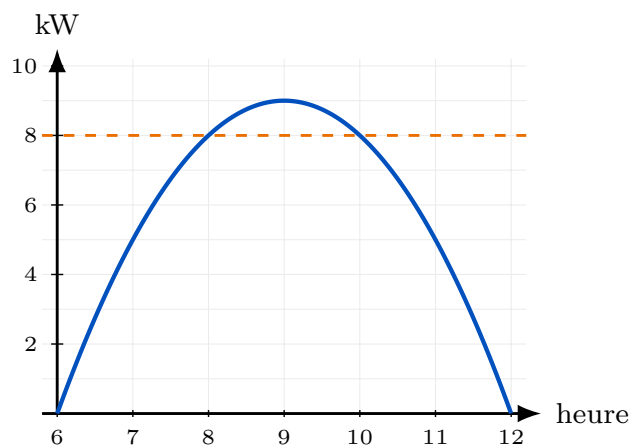
Déterminer la largeur maximale du véhicule, au centimètre près, pour qu'il puisse passer sans toucher la voûte. Justifier le point de contrôle choisi.

38 *** [MOD, REP, CAL]

Production solaire. Entre 6 h et 12 h, la puissance produite est modélisée par

$$P(t) = -(t - 6)(t - 12) \quad (\text{kW}).$$

La consommation du bâtiment est constante et vaut 8 kW.



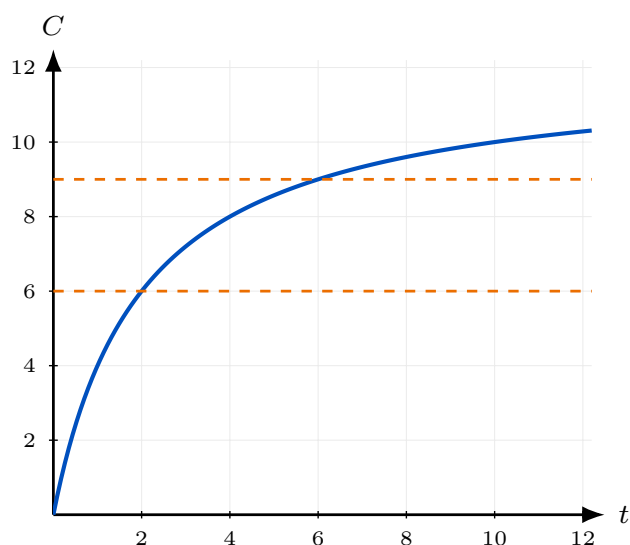
Déterminer exactement les heures où la production couvre la consommation. Pendant combien de temps le bâtiment est-il autonome sur cette période ?

39 *** [MOD, RAI, CAL]

Concentration d'un médicament. Pour $t \geq 0$, on modélise

$$C(t) = \frac{12t}{t+2} \quad (\text{mg/L}).$$

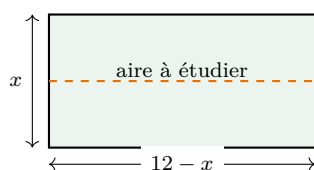
La zone thérapeutique est $6 \leq C(t) \leq 9$.



Déterminer l'intervalle de temps où la concentration est thérapeutique. Expliquer pourquoi on peut multiplier les inégalités par $t+2$ sans changer leur sens.

40 *** [MOD, CAL, REP]

Jardin rectangulaire. Un rectangle de périmètre 24 m a pour largeur x et longueur $12 - x$.



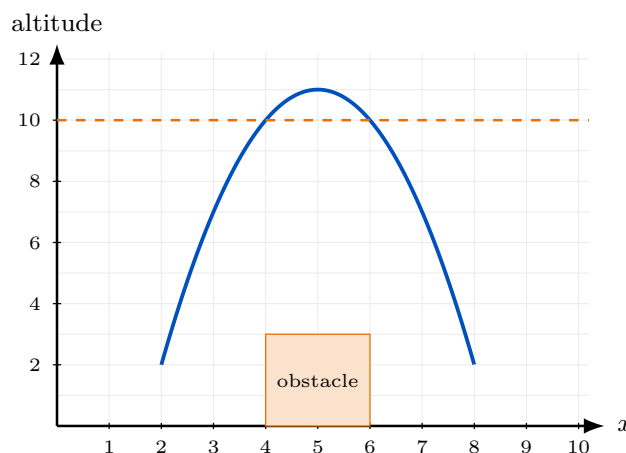
Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle au moins 32 m^2 ? Commencer par préciser les contraintes géométriques sur x .

41 *** [MOD, CH, REP]

Drone au-dessus d'un obstacle. Sur $2 \leq x \leq 8$, l'altitude est

$$d(x) = -(x-2)(x-8) + 2.$$

Une zone exige une altitude d'au moins 10 m.



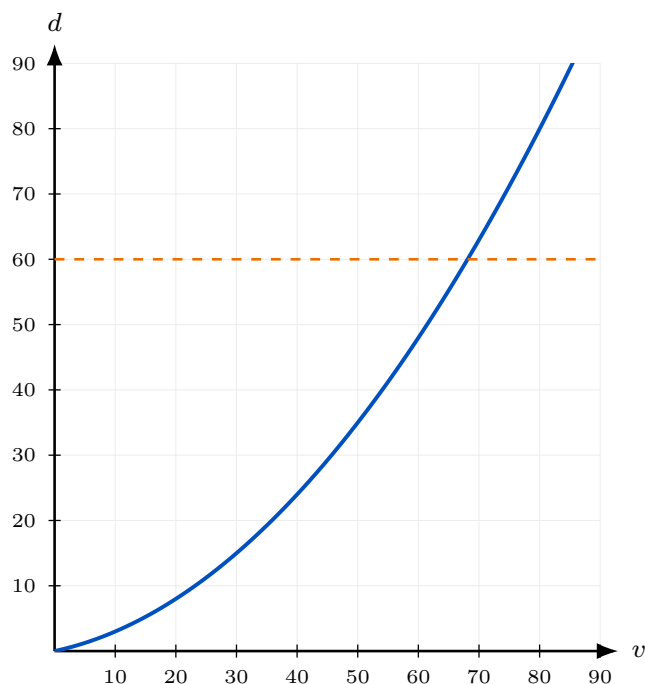
Déterminer exactement la portion de trajectoire respectant la contrainte. Proposer une vérification graphique et une vérification algébrique.

42 *** [MOD, CH, COM]

Distance d'arrêt simplifiée. Pour une vitesse v en km/h, on utilise

$$d(v) = 0,01v^2 + 0,2v \quad (\text{m}).$$

La visibilité est de 60 m.



Sans utiliser de formule générale du second degré, déterminer la vitesse entière maximale compatible avec la visibilité. Encadrer d'abord la solution graphique, puis vérifier par deux calculs consécutifs.