

Objectif. Passer d'une courbe à un tableau de variations et réciproquement ; déterminer et exploiter des extremums ; comparer et encadrer des images ; résoudre des problèmes simples d'optimisation.

Conseils. Toujours préciser l'intervalle étudié. Une comparaison d'images doit citer le sens de variation utilisé. Pour un maximum ou un minimum, donner la valeur et l'endroit où elle est atteinte. Calculatrice ou logiciel seulement lorsque la consigne l'autorise. Les exercices ★★ sont des approfondissements.

A — Réactivation et automatismes

1 ★ [REP, COM]

Compléter par *croissante*, *décroissante* ou *constante*.

- Quand x augmente, les images ne diminuent pas : f est ...
- Quand x augmente, les images ne montent pas : g est ...
- Toutes les images sont égales à 4 : h est ...

2 ★ [CAL]

Calculer mentalement.

$$\begin{array}{ll} f(-2), f(x) = 3x - 1 & g(3), g(x) = x^2 \\ h(4), h(x) = \sqrt{x} & u(-2), u(x) = x^3 \\ v(-5), v(x) = |x| & w(-4), w(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

3 ★ [REP]

Donner l'ensemble de définition de

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto x^3.$$

4 ★ [REP, RAI]

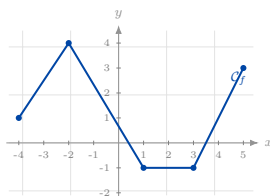
Sans tracer les courbes, donner les variations connues.

- $x \mapsto x^2$ sur $] -\infty; 0]$ puis sur $[0; +\infty[$.
- $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
- $x \mapsto |x|$ de part et d'autre de 0.

5 ★ [REP]

À partir de la courbe :

- lire $f(-2)$, $f(1)$ et $f(5)$;
- citer un intervalle où f est constante ;
- relever un point haut et un point bas.



6 ★ [REP, COM]

Cocher les phrases qui décrivent une **variation**.

- $f(2) = 5$.
- f est décroissante sur $[-1; 4]$.
- La courbe passe par $A(3; 2)$.
- g est constante sur $[0; 3]$.
- $h(x) \geq -2$ pour tout $x \in I$.

7 ★ [RAI]

Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 4x - 7, \quad g(x) = -3x + 2, \quad h(x) = 5.$$

Justifier chaque réponse par le signe du coefficient directeur.

8 ★ [REP, COM]

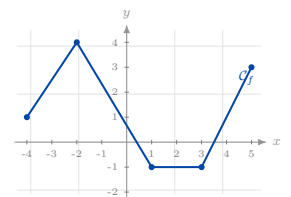
Compléter correctement.

- Le ... de f sur I est la plus grande valeur prise par f sur I .
- Si cette valeur vaut 6 pour $x = 2$, on écrit : « le maximum est ..., atteint en ... ».
- Un extremum dépend toujours de l'... étudié.

B — Applications directes

9 ★ [REP, COM]

La fonction f est représentée ci-contre.



- Donner son ensemble de définition.
- Décrire ses variations.
- Donner son maximum et son minimum sur l'ensemble de définition, en précisant où ils sont atteints.

10 ★ [REP]

Construire le tableau de variations de la fonction f de l'exercice 9. Placer les abscisses où le sens de variation change, les images correspondantes et les flèches.

x	-4	-2	1	3	5
$f(x)$	...	...	...	...	...

11 ★ [REP, COM]

On considère une fonction g définie sur $[-3; 4]$.

x	-3	1	2	4
$g(x)$	-2	5	5	1

- Donner ses intervalles de croissance, de constance et de décroissance.
- Donner son maximum et son minimum, avec les endroits où ils sont atteints.
- Comparer $g(-2)$ et $g(0)$. Justifier.
- Encadrer $g(x)$ pour $x \in [2; 4]$.

12 ** [REP, RAI]

Le tableau de variations de h est donné.

x	-5	-1	3	6
$h(x)$	4	-2	3	0

Comparer en justifiant :

$$h(-4) \dots h(-2), \quad h(0) \dots h(2), \quad h(4) \dots h(5).$$

13 * [REP, COM]

Avec le tableau de h , encadrer $h(x)$ dans chacun des cas :

$$x \in [-5; -1], \quad x \in [-1; 3], \quad x \in [3; 6].$$

14 ** [REP]

À l'aide de la courbe de l'exercice 9, donner le maximum et le minimum de f sur chacun des intervalles :

$$[-4; -2], \quad [-2; 3], \quad [1; 5].$$

Préciser à chaque fois où ils sont atteints.

15 * [REP]

Dresser les tableaux de variations des fonctions de référence :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Pour l'inverse, séparer les deux intervalles de définition.

16 ** [REP, RAI]

Dresser un tableau de variations adapté pour chacune des fonctions affines :

$$f : x \mapsto 3x - 7, \quad g : x \mapsto -2x + 5, \quad h : x \mapsto 4.$$

17 ** [REP, COM]

Une fonction p , définie sur $[-4; 5]$, est : croissante de -4 à -1 , décroissante de -1 à 2 , puis croissante de 2 à 5 . On sait que

$$p(-4) = 0, \quad p(-1) = 6, \quad p(2) = -3, \quad p(5) = 2.$$

Construire son tableau de variations.

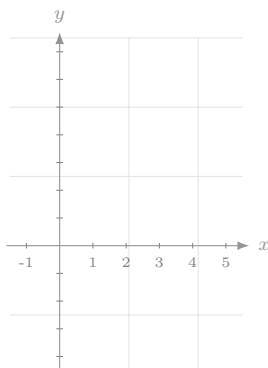
18 ** [REP, CH]

Tracer dans un repère une courbe compatible avec le tableau de variations de h donné à l'exercice 12. La courbe doit passer par les quatre points dont les coordonnées sont connues.

19 ** [CAL, REP]

On considère $q(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Compléter le tableau de valeurs pour $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Placer les points dans le repère.
3. Conjecturer les variations de q et son minimum.



C — Entraînement approfondi

20 ** [COM, RAI]

Lina écrit : « Entre -4 et -2 , la courbe monte, donc elle est croissante. » Réécrire cette réponse avec le vocabulaire et l'intervalle attendus.

21 ** [RAI, COM]

À propos du tableau de h , Sami affirme :

$$-4 < 5 \quad \text{donc} \quad h(-4) < h(5).$$

Expliquer précisément pourquoi son raisonnement n'est pas valide. Le tableau permet-il malgré tout de comparer ces deux images ?

22 ** [REP, RAI]

Un élève propose pour une même fonction :

x	-2	0	3	5
$f(x)$	1 ↗	4 ↘	-1 ↗	6

puis affirme que le minimum est 1.

1. Repérer l'erreur.
2. Donner le minimum correct et l'endroit où il est atteint.
3. Rédiger la conclusion complète.

23 ** [RAI]

La fonction constante $c : x \mapsto 3$ est-elle croissante ? Est-elle décroissante ? Répondre en revenant aux définitions du cours, qui utilisent $\leq$ et $\geq$.

24 ** [RAI, COM]

Utiliser les variations de la fonction inverse pour comparer, sans décimales :

$$-\frac{1}{6} \dots -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{7} \dots \frac{1}{3}.$$

Pour comparer -1 et $\frac{1}{2}$, le sens de variation de l'inverse sur un seul intervalle est-il nécessaire ?

25 ** [RAI, CAL]

Comparer sans développer de longues listes de calculs :

1. $(-5)^2 \dots (-3)^2$;
2. $2,4^2 \dots 2,7^2$;
3. $(-1,8)^2 \dots 1,6^2$.

Préciser dans chaque cas la propriété utilisée.

26 ** [REP, RAI]

On considère $r(x) = (x - 2)^2 - 3$.

1. Expliquer pourquoi $r(x) \geq -3$ pour tout réel x .
2. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
3. Conjecturer puis dresser le tableau de variations de r .

27 ** [REP, RAI]

On considère $s(x) = |x + 1| + 2$.

1. Déterminer son minimum et l'endroit où il est atteint.
2. Décrire ses variations.
3. Tracer une courbe compatible dans un repère.

28 ** [REP, RAI]

On cherche numériquement le maximum de $f(x) = -(x - 1,73)^2 + 4,3$ sur $[-2; 5]$.

```
x = -2 ; xmax = x ; M = f(x)
tant que x <= 5 :
  si f(x) > M : xmax = x ; M = f(x)
  x = x + 0.1
```

1. Expliquer le rôle de M et de $x_{\max}$.
2. Quelle approximation peut-on attendre ?
3. Que change un pas de 0,01 ?

29 ** [REP, RAI]

Un logiciel indique que u est croissante sur $[-3; 1,8]$, puis décroissante sur $[1,8; 5]$, avec $u(1,8) \approx 7,42$.

1. Donner le maximum de u sur $[-3; 5]$.
2. Si $u(-3) = -1$ et $u(5) = 2$, donner aussi son minimum.
3. En déduire un encadrement de $u(x)$ pour $x \in [-3; 5]$.

30 *** [CAL, RAI]

Pour approcher la longueur d'une courbe, on relie des points successifs $A_i(x_i; f(x_i))$ par des segments.

1. Avec Pythagore, exprimer $A_i A_{i+1}$.
2. Compléter :

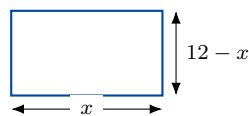
$$L \leftarrow L + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (\dots)^2}.$$

3. Expliquer pourquoi un pas plus petit améliore généralement l'approximation.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

31 *** [MOD, REP]

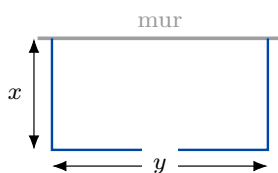
Un rectangle a un périmètre de 24 cm. On note x sa longueur.



1. Exprimer l'autre dimension puis l'aire $A(x)$.
2. Préciser l'intervalle des valeurs possibles de x .
3. À l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique, déterminer les dimensions donnant l'aire maximale.
4. Rédiger l'interprétation.

32 *** [MOD, CH]

On dispose de 40 m de grillage pour délimiter trois côtés d'un enclos rectangulaire, le quatrième étant un mur.



1. En notant x la profondeur, exprimer la longueur y , puis l'aire.
2. Déterminer expérimentalement l'aire maximale.
3. Donner les dimensions correspondantes et contrôler la longueur de grillage.

35 *** [CH, REP, COM]

On veut concevoir une fonction k définie sur $[-5; 6]$ telle que

$$\begin{aligned} k(-5) &= 0, & k(-2) &= 5, & k(1) &= -1, \\ k(4) &= -1, & k(6) &= 3. \end{aligned}$$

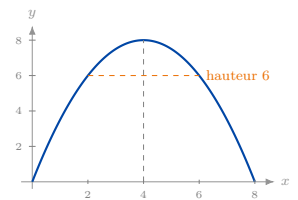
Elle est successivement croissante, décroissante, constante puis croissante.

Compétences : CH chercher ; MOD modéliser ; REP représenter ; RAI raisonner ; CAL calculer ; COM communiquer.

33 *** [MOD, REP, RAI]

L'arche d'un pont est modélisée, pour $x \in [0; 8]$, par

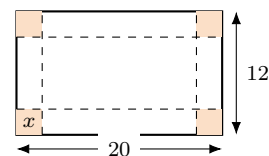
$$h(x) = -0,5(x - 4)^2 + 8.$$



1. Donner sa hauteur maximale et l'endroit où elle est atteinte.
2. Déterminer graphiquement la largeur du passage où la hauteur est au moins 6 m.
3. Expliquer le lien avec une inéquation qui sera étudiée en N13.

34 *** [MOD, CH, REP]

Dans une plaque rectangulaire de 20 cm sur 12 cm, on découpe quatre carrés de côté x , puis on replie pour former un plateau.



1. Justifier $0 \leq x \leq 6$.
2. Montrer que $V(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$.
3. Avec la calculatrice, conjecturer la valeur de x donnant le volume maximal, au millimètre près.
4. Interpréter le résultat.

1. Construire son tableau de variations.
2. Tracer une courbe possible.
3. Donner son maximum et son minimum.
4. Le tableau détermine-t-il une valeur unique de $k(0)$? Justifier.