

Objectif. Construire un répertoire fiable des fonctions valeur absolue, carré, inverse, racine carrée et cube : domaines, courbes, signes, variations, comparaisons et résolutions.

Conseils. Avant tout calcul, identifier la fonction et son domaine. Pour comparer ou résoudre, choisir le registre le plus efficace : valeurs, courbe ou raisonnement algébrique. Sans calculatrice, sauf mention contraire. Les exercices *** sont des approfondissements.

A — Réactivation et automatismes

1 ★ [CAL]

Calculer mentalement.

a) $(-3)^2$ b) -3^2 c) $\sqrt{49}$ d) $|-7|$
 e) $(-2)^3$ f) $\sqrt[3]{-27}$ g) $\frac{1}{-4}$ h) $\sqrt{0,81}$

2 ★ [CAL, REP]

On considère

$$\begin{array}{lll} c : x \mapsto x^2 & a : x \mapsto |x| & i : x \mapsto \frac{1}{x} \\ r : x \mapsto \sqrt{x} & u : x \mapsto x^3 & \end{array}$$

Compléter.

x	-4	-1	0	1	4
$c(x)$					
$a(x)$					
$i(x)$					
$r(x)$					
$u(x)$					

Écrire « non défini » lorsque c'est nécessaire.

3 ★ [REP]

Donner l'ensemble de définition de chaque fonction.

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto x^3.$$

4 ★ [CAL, COM]

Pour $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, écrire avec le vocabulaire « image » et « antécédent » les égalités $f(-5) = 25$ et $g(49) = 7$.

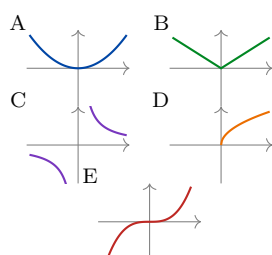
5 ★ [REP, CAL]

Dire si chaque point appartient à la courbe indiquée.

$$\begin{array}{ll} A(-3; 9) \text{ et } y = x^2, & B(-2; -8) \text{ et } y = x^3, \\ C(4; 2) \text{ et } y = \sqrt{x}, & D(0; 0) \text{ et } y = \frac{1}{x}, \\ E(-1; 1) \text{ et } y = |x|. & \end{array}$$

6 ★ [REP]

Associer chaque silhouette à l'une des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$.



7 ★ [CAL, RAI]

Comparer sans calculatrice.

$$\begin{array}{ll} |-7| \dots |5| & (-4)^2 \dots 3^2 \\ (-2)^3 \dots 1^3 & \sqrt{11} \dots \sqrt{15} \end{array}$$

8 ★ [REP, RAI]

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions de référence de N11 ? Préciser la nature des autres.

$$\begin{array}{lll} x \mapsto -2x + 3 & x \mapsto x^2 & x \mapsto \frac{1}{x} \\ x \mapsto 4 & x \mapsto |x| & x \mapsto x^3 \end{array}$$

9 ★ [CAL, REP]

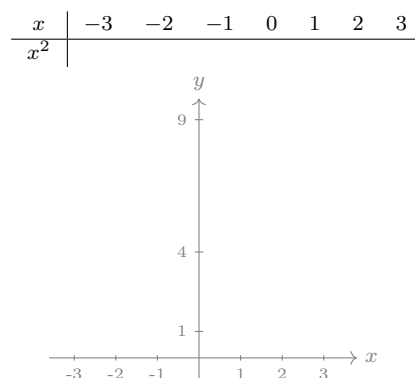
Résoudre mentalement, lorsque c'est possible dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} x^2 = 16 & |x| = 3 & \sqrt{x} = 5 \\ x^3 = -8 & \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} & \end{array}$$

B — Applications directes

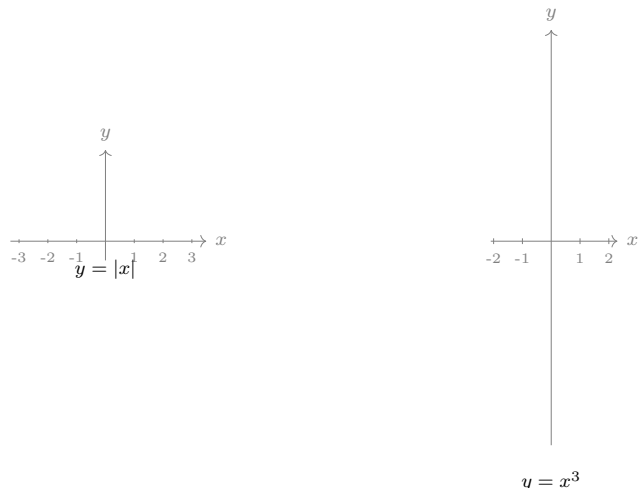
10 ★ [CAL, REP]

Compléter le tableau, puis placer les points dans le repère et tracer la courbe de $c : x \mapsto x^2$.



11 ★ [CAL, REP]

Construire de même les courbes de $a : x \mapsto |x|$ et $u : x \mapsto x^3$.



Choisir des valeurs adaptées avant de placer les points.

12 ★ [CAL, REP]

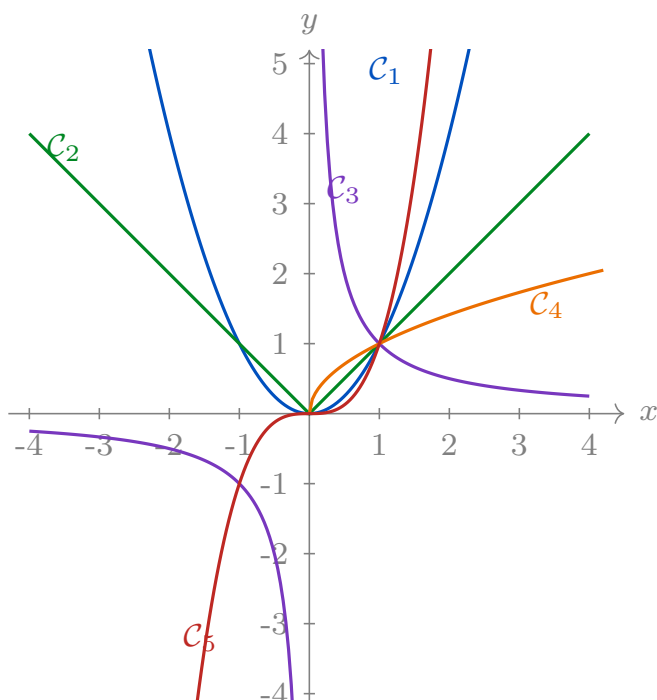
Construire les courbes de $i : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $r : x \mapsto \sqrt{x}$.



Pour la fonction inverse, placer au moins quatre points de chaque côté de 0.

13 ★ [REP]

Les cinq courbes de référence sont représentées ci-dessous.



1. Identifier chaque courbe.

2. Lire $c(-2)$, $a(-3)$, $r(4)$, $u(-1)$ et $i(2)$.

3. Donner graphiquement les antécédents de 1 par chacune des fonctions.

14 ★ [REP, RAI]

Donner le signe de chacune des cinq fonctions sur son ensemble de définition. Présenter la réponse par phrases ou par tableaux de signes compacts.

15 ★★ [REP]

Compléter les tableaux de variations suivants en ajoutant les flèches et les valeurs utiles.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $			

Puis décrire par une phrase les variations de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

16 ★ [CAL, RAI]

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$x^2 = 25, \quad x^2 = 7, \quad x^2 = 0, \quad x^2 = -4.$$

Conclure chaque résolution par $\mathcal{S} = \dots$.

17 ★★ [REP, RAI]

Résoudre graphiquement puis vérifier algébriquement.

$$x^2 < 9, \quad x^2 \leq 4, \quad x^2 > 16.$$

Donner les solutions sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

18 ★ [CAL, REP]

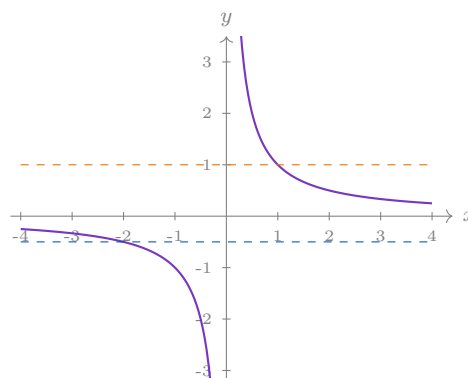
Résoudre.

$$|x| = 6, \quad |x| < 2, \quad |x| \leq 3,5, \quad |x| > 4.$$

Pour chaque inéquation, représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

19 ★★ [CAL, REP]

On utilise la courbe de $i : x \mapsto \frac{1}{x}$.



1. Résoudre algébriquement $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{x} = -2$.

2. Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} < 1$ et $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2}$.

3. Vérifier que 0 n'apparaît jamais dans les solutions.

20 ★ [CAL, RAI]

Résoudre sur les ensembles de définition adaptés.

$$\sqrt{x} = 4, \quad \sqrt{x} < 3, \quad x^3 = 27, \quad x^3 \leq -8.$$

Préciser le domaine avant chaque résolution.

21 ★★ [RAI, COM]

Comparer sans développer de longues valeurs.

- a) 37^2 et 41^2 , b) $(-8)^2$ et $(-5)^2$,
 c) $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{15}$, d) $\sqrt{23}$ et $\sqrt{31}$,
 e) $(-4,2)^3$ et $(-4)^3$, f) $|-13|$ et $|9|$.

Justifier chaque comparaison à l'aide des variations ou de la courbe.

C — Choisir, raisonner, approfondir

22 ★★ [RAI, COM]

Pour chaque question, choisir une méthode *graphique*, *numérique* ou *algébrique*, puis justifier ce choix.

$$x^2 = 2 \quad |x| < 5 \quad \frac{1}{x} = 0,2$$

$$\sqrt{x} = 2,7 \quad x^3 = -50$$

Il n'est pas demandé de résoudre toutes les questions.

23 ★★ [RAI, COM]

Corriger chaque affirmation et expliquer l'erreur.

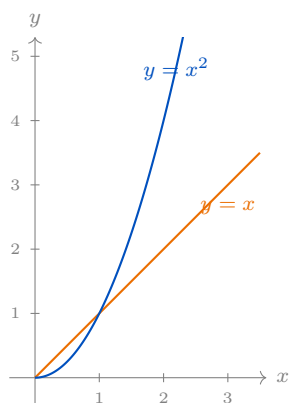
$$\sqrt{x^2} = x \quad \frac{1}{0} = 0$$

$$(-5)^2 = -25 \quad \sqrt{-9} = -3$$

$$x^2 < 16 \iff x < 4, \quad |x| = 7 \iff x = 7.$$

24 ★★ [RAI, CAL]

Sur $[0; +\infty[$, comparer les courbes $y = x$ et $y = x^2$.



1. Conjecturer les positions relatives sur $[0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$.
2. Étudier le signe de $x^2 - x = x(x - 1)$ pour $x \geq 0$.
3. Démontrer la conjecture.

25 ★★★ [RAI, COM]

Démonstration guidée des variations de la fonction carré.

1. Soient $0 \leq a < b$. Factoriser $b^2 - a^2$, puis déterminer son signe.
2. En déduire que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. Soient $a < b \leq 0$. Comparer $-b$ et $-a$, puis leurs carrés.

4. En déduire les variations de la fonction carré sur $] -\infty; 0]$.

26 ★★★ [RAI, COM]

Démonstration guidée des variations de la fonction inverse.

1. Soient $0 < a < b$. Calculer $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ et déterminer son signe.
2. En déduire le sens de variation sur $]0; +\infty[$.
3. Reprendre le raisonnement pour $a < b < 0$.
4. Pourquoi ne peut-on pas parler de variations sur tout $\mathbb{R}$?

27 ★★ [RAI, CAL]

Comparer sans calculatrice, en exploitant le signe des nombres et les variations.

$$\begin{array}{ccc} (-103)^2 & \dots & (-97)^2 \\ \sqrt{2025} & \dots & \sqrt{2116} \\ (-12)^3 & \dots & (-11)^3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \frac{1}{-8} & \dots & \frac{1}{-11} \\ | -2,04 | & \dots & | 2,4 | \end{array}$$

28 ★★ [RAI, CAL]

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en choisissant une écriture adaptée.

$$x^2 = |x|, \quad x^3 = x^2, \quad \sqrt{x} = x.$$

Pour la dernière équation, commencer par préciser le domaine.

29 ★★ [REP, RAI]

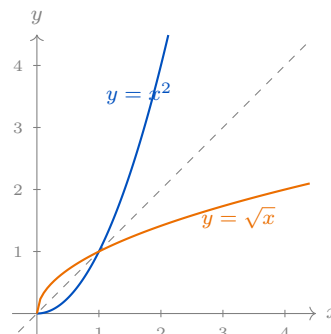
On sait qu'une fonction f est l'une des cinq fonctions de référence.

x	-4	-1	0	1	4
$f(x)$	16	1	0	1	16

1. Identifier f , puis justifier que les cinq valeurs suffisent ici.
2. Proposer un tableau de cinq valeurs qui identifierait la fonction cube.
3. Expliquer pourquoi le seul couple $(1; 1)$ ne permet aucune identification.

30 ★★★ [REP, RAI]

Approfondissement : carré et racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.



1. Placer $A(2; 4)$ et $B(4; 2)$. Quel lien géométrique les unit ?
2. Recommencer avec $A'(3; 9)$ et $B'(9; 3)$, en adaptant mentalement la fenêtre.
3. Formuler le lien entre les deux courbes par rapport à la droite $y = x$.

31 ** [MOD, REP]

Le programme suivant cherche un encadrement de $\sqrt{7}$.

```
x = 0
while x*x < 7:
    x = x + 0.1
print(x-0.1, x)
```

1. Expliquer le rôle de la condition $x*x < 7$.
2. Quel encadrement le programme affiche-t-il ?
3. Modifier une seule valeur pour obtenir une amplitude 0,01.

32 ** [MOD, RAI]

Associer chaque situation au modèle le plus naturel parmi x^2 , $|x|$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et x^3 .

1. Aire d'un carré de côté x .
2. Distance de x à l'origine sur une droite.
3. Arête d'un cube de volume x .
4. Part individuelle d'une somme fixe répartie entre x personnes.
5. Volume d'un cube d'arête x .

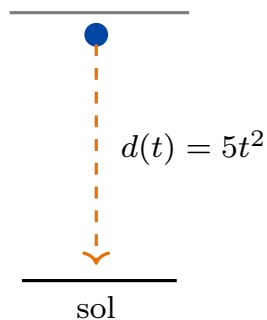
Préciser dans chaque cas les valeurs possibles de x .

D — Synthèse et problèmes

33 ** [MOD, CAL, COM]

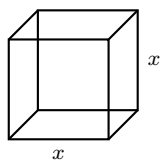
Une pierre est lâchée sans vitesse initiale. Dans un modèle simplifié, la distance parcourue après t secondes est $d(t) = 5t^2$, pour $t \geq 0$.

1. Calculer $d(1,5)$ et $d(3)$.
2. À quel instant la pierre atteint-elle 45 m ?
3. Déterminer quand la distance dépasse 80 m.
4. Interpréter les solutions dans le contexte.



34 *** [MOD, CAL, RAI]

Une boîte cubique fermée doit avoir un volume de 216 cm^3 . On note $x > 0$ la longueur de son arête.



1. Modéliser la contrainte par une équation.
2. Déterminer x .

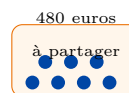
3. La même boîte doit maintenant contenir au moins 343 cm^3 . Quelle condition doit vérifier x ?

4. Expliquer pourquoi une solution négative serait dépourvue de sens.

35 *** [MOD, RAI, COM]

Une association loue une salle 480 euros. Si n personnes participent, la part

individuelle est $p(n) = \frac{480}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.



1. Comparer les parts pour 12, 20 et 30 personnes.
2. Combien faut-il au minimum de participants pour payer au plus 24 euros chacun ?
3. Pourquoi le modèle n'utilise-t-il que des points isolés de la courbe inverse ?
4. Discuter l'effet d'une personne supplémentaire lorsque le groupe est petit puis grand.

36 ** [MOD, REP, RAI]

Une machine remplit des flacons de 250 mL. Elle est conforme si l'écart entre le volume réel v et la cible est au plus 3 mL.



1. Modéliser l'écart par une fonction de référence.
2. Écrire la condition de conformité avec une valeur absolue.
3. Donner l'intervalle des volumes conformes.
4. Un flacon contient 246,8 mL : est-il conforme ?

37 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Une entreprise veut représenter quatre phénomènes par des fonctions simples :

- le volume d'un cube en fonction de son arête ;
- la distance à une valeur cible ;
- le coût par personne d'une dépense fixe ;
- l'aire d'un disque en fonction de son rayon.

Pour chaque phénomène, proposer une fonction, préciser son domaine réaliste et décrire l'allure de sa courbe. Puis choisir deux phénomènes et inventer une question conduisant à une équation ou une inéquation. La méthode n'est pas imposée, mais la rédaction doit expliquer le choix du modèle.