

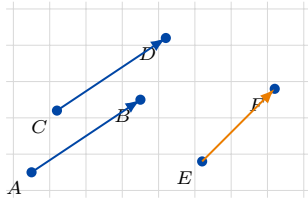
Objectif du TD. S'entraîner à coder un déplacement par un vecteur, construire et simplifier avec Chasles, calculer coordonnées, normes et milieux, puis utiliser le déterminant pour prouver un alignement ou un parallélisme. **Cours associé : N07.**

A. Reconnaître, construire, simplifier Vecteurs, égalité, somme, Chasles

① ★ [REP]

Même déplacement ?

Sur la figure, comparer les déplacements $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$. Écrire toutes les égalités vectorielles vraies.



② ★ [COM]

Vocabulaire précis

Compléter chaque phrase avec *direction*, *sens*, *norme*, *représentant*.

- Deux flèches peuvent représenter le même vecteur même si elles ne partent pas du même point.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a la même ... que $\overrightarrow{AB}$, mais le ... contraire.
- La longueur d'une flèche représente la ... du vecteur.

③ ★ [CAL]

Opposés et vecteur nul

Simplifier.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}, \quad -\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{PQ}.$$

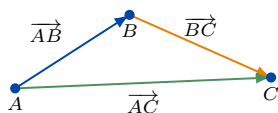
Dire à chaque fois si le résultat est un vecteur nul ou un vecteur non nul.

④ ★ [CAL]

Chasles direct

Simplifier le plus possible.

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ | b) $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AI}$ |
| c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$ | d) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX}$ |
| e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ | f) $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE}$ |



⑤ ★★ [RAI]

Chaînes à réordonner

Réordonner si nécessaire, puis simplifier.

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}, \quad \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RS}.$$

Dans le dernier cas, quelle flèche manque-t-il pour obtenir $\overrightarrow{QP}$?

⑥ ★ [CAL]

Compléter une égalité

Compléter par un vecteur.

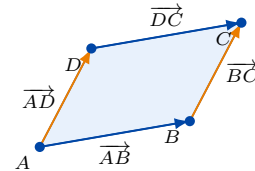
$$\overrightarrow{AB} + \dots = \overrightarrow{AC}, \quad \dots + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \dots = \overrightarrow{MQ}.$$

Écrire une phrase de méthode utilisant le mot « arrivée ».

⑦ ★★ [REP]

Parallélogramme

Dans le parallélogramme $ABCD$, écrire quatre égalités vectorielles et deux sommes de vecteurs.



⑧ ★★ [REP]

Construire à partir d'une flèche

Sur un quadrillage, placer deux points A et B . Construire un point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, puis un point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire de A, B, D ?

⑨ ★★ [RAI]

Milieu en langage vectoriel

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

- I milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- I milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Dessiner un segment pour contrôler les sens.

⑩ ★★ [MOD]

Déplacement codé

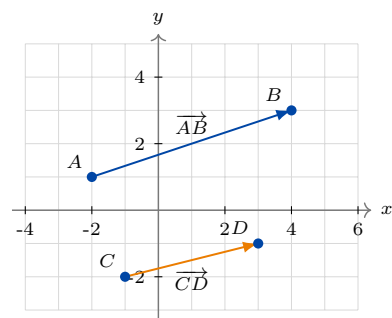
Un pion part de P , avance de 3 carreaux vers la droite et 2 vers le haut, puis de 2 carreaux vers la droite et 1 vers le bas. Décrire le déplacement total par un vecteur et par une flèche unique.

B. Coordonnées, normes, milieux Arrivée moins départ, distance, milieu

⑪ ★ [REP]

Lire dans un repère

Lire les coordonnées de A, B, C, D , puis calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Les deux vecteurs semblent-ils égaux ?



⑫ ★ [CAL]

Arrivée moins départ

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $A(2; 5), B(7; 1)$ | b) $A(-3; 4), B(1; -2)$ |
| c) $A(6; -1), B(-2; -5)$ | d) $A(-4; -3), B(-1; 6)$ |

13 ** [CAL]

Retrouver l'arrivée

Dans chaque cas, déterminer les coordonnées de B .

- a) $A(1; -2)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
 b) $A(-4; 6)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$
 c) $A(0; 3)$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14 * [CAL]

Normes rapides

Calculer la norme des vecteurs suivants.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Donner la valeur exacte; simplifier les racines quand c'est possible.

15 ** [CAL]

Distance entre deux points

Calculer AB , CD , puis comparer.

$$A(-2; 1), B(4; 3), \quad C(1; -3), D(7; -1).$$

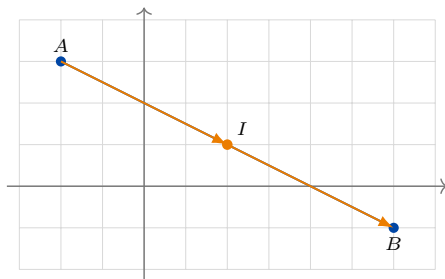
Interpréter le résultat en termes de vecteurs.

16 * [CAL]

Coordonnées du milieu

Calculer les coordonnées du milieu de chaque segment.

segment $[AB]$ avec $A(-2; 3)$, $B(6; -1)$,
 segment $[CD]$ avec $C(5; 7)$, $D(-3; 1)$.

**17** ** [RAI]

Retrouver l'autre extrémité

Le point $I(2; -1)$ est le milieu de $[AB]$.

- Si $A(-4; 5)$, déterminer B .
- Si $B(7; 3)$, déterminer A .

Faire apparaître une égalité sur les abscisses et une égalité sur les ordonnées.

18 ** [CAL]

Parallélogramme en coordonnées

On donne $A(-1; 2)$, $B(4; 1)$ et $D(2; 5)$. Déterminer les coordonnées du point C pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Proposer deux méthodes : par égalité de vecteurs et par diagonales.

19 ** [RAI]

Centre d'un quadrilatère

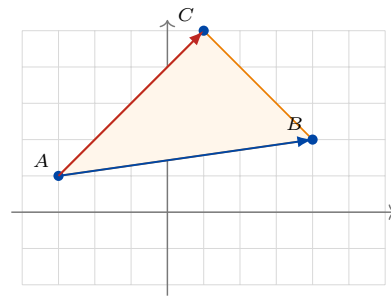
Soient $A(-3; 1)$, $B(5; 3)$, $C(7; -1)$ et $D(-1; -3)$.

- Calculer les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.
- Que peut-on en déduire sur le quadrilatère $ABCD$?

20 ** [REP]

Vecteurs dans un triangle

Sur la figure, calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, puis AB et AC . Le triangle semble-t-il isocèle? Justifier par le calcul.

**21** ** [CAL]

Combinaison de déplacements

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer :

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad 2\vec{u} - \vec{w}, \quad -3\vec{v} + \vec{u}, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.$$

22 ** [RAI]

Égalité vectorielle à résoudre

Déterminer le réel k lorsque c'est possible.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Conclure sur la colinéarité dans chaque cas.

C. Colinéarité, déterminant, preuves

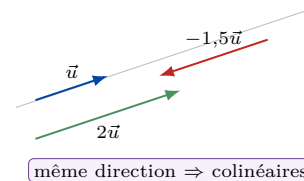
parallélisme, coefficient

Alignement,

23 * [REP]

Lire les multiples

Sur la figure, exprimer chaque vecteur en fonction de $\vec{u}$. Préciser le coefficient et le sens.

**24** * [CAL]

Colinéaires ou non?

Dire si les vecteurs sont colinéaires, d'abord par proportionnalité, puis par déterminant.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

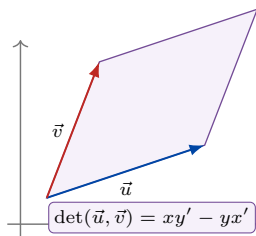
25 * [CAL]

Calculs de déterminants

Calculer.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} : \det(\vec{u}, \vec{v}), \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : \det(\vec{u}, \vec{v}),$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} : \det(\vec{u}, \vec{v}), \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} : \det(\vec{u}, \vec{v}).$$



26 ** [RAI]

Alignement de trois points

Tester l'alignement des points.

$$A(1;2), B(4;8), C(6;12).$$

Même question avec $D(-2;5)$, $E(1;1)$, $F(7;-7)$. Rédiger avec les vecteurs choisis.

27 ** [RAI]

Parallélisme de droites

On donne $A(-3;2)$, $B(1;5)$, $C(2;-1)$, $D(6;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles? Justifier avec un déterminant.

28 ** [CAL]

Trouver une coordonnée manquante

Déterminer a pour que les vecteurs soient colinéaires.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2a \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

29 ** [MOD]

Point à placer sur une droite

Soient $A(2;-1)$, $B(8;3)$ et $M(x;1)$. Déterminer x pour que A , B et M soient alignés. Faire apparaître le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

30 ** [RAI]

Vecteur directeur caché

La droite d passe par $P(-1;4)$ et $Q(5;1)$. Parmi les vecteurs suivants, lesquels peuvent être des vecteurs directeurs de d ?

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Justifier sans tracer.

31 *** [RAI]

Démonstration guidée

On donne $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(1;-3)$, $D(6;0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Prouver que $(AB) \parallel (CD)$.
3. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont-ils la même longueur?

32 ** [RAI]

Vrai ou faux vectoriel

Dire si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si deux vecteurs ont la même norme, alors ils sont égaux.
2. Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3. Si $\vec{v} = -2\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.
4. Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

33 *** [RAI]

Alignement sans dessin parfait

On considère $A(-5;2)$, $B(1;5)$, $C(7;8)$ et $D(4;10)$.

1. Prouver que A , B , C sont alignés.
2. Le point D appartient-il à cette même droite?

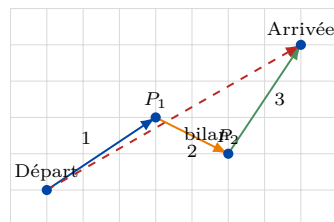
Conclure par une phrase.

D. Synthèse et problèmes Choisir les vecteurs, modéliser, rédiger

34 ** [MOD]

Trajet d'un robot

Le robot suit trois déplacements successifs représentés sur le quadrillage.

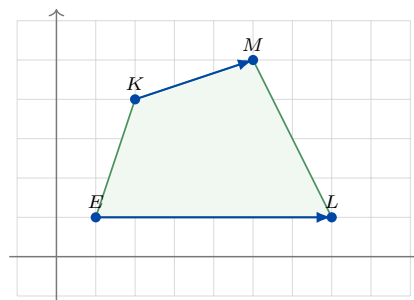


1. Donner les coordonnées de chaque déplacement.
2. Calculer le déplacement total.
3. Trouver un trajet en deux déplacements qui a le même bilan.

35 ** [MOD]

Plan d'un parc

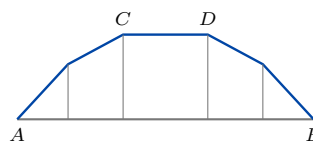
Sur le plan ci-dessous, déterminer si les côtés opposés du quadrilatère $ELMK$ sont parallèles. En déduire, si possible, la nature du quadrilatère.



36 ** [MOD]

Pont et barres parallèles

Le schéma représente une structure simplifiée. On modélise les points par $A(0;0)$, $B(7;0)$, $C(2;5;2)$, $D(4;5;2)$, $E(1;2;1,3)$, $F(5;8;1,3)$.



Montrer par le calcul que les barres (CD) et (AB) sont parallèles. Les barres (CE) et (DF) le sont-elles?

37 *** [RAI]

Quadrilatère à identifier

Soient $A(-2;1)$, $B(4;3)$, $C(6;-1)$, $D(0;-3)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer les longueurs de ses côtés.
3. Est-ce un losange? un rectangle? Justifier.

38 *** [RAI]

Médianes d'un triangle

Dans le triangle ABC , on donne $A(-4;2)$, $B(6;4)$, $C(2;-2)$. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$.

1. Calculer I et J .
2. Calculer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
3. Les médianes (AI) et (BJ) sont-elles parallèles? Justifier.

39 *** [CH]

Choisir une stratégie

On donne $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(7;7)$. Déterminer tous les points $D(x;y)$ tels que $ABCD$ soit un parallélogramme. Expliquer pourquoi il y a une seule réponse lorsque l'ordre des lettres est imposé.

40 *** [CH]

Point sur deux contraintes

Trouver les coordonnées d'un point $M(x;y)$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{avec} \quad A(-1;3), \quad B(2;-1).$$

Puis vérifier que A , B et M sont alignés à l'aide d'un déterminant.

41 *** [MOD]

Mini-problème de synthèse

Une application de cartographie place trois antennes aux points

$$A(-6;2), \quad B(2;5), \quad C(10;8).$$

1. Les trois antennes sont-elles alignées ?
2. Une quatrième antenne D doit être placée pour que $ABCD$ soit un parallélogramme. Calculer D .
3. La diagonale $[AC]$ mesure-t-elle plus de 17 unités ?

42 ** [MOD,CAL]

Livraisons dans une ville en damier

Dans une ville organisée en damier, chaque intersection est repérée par (numéro de rue ; numéro d'avenue). Un livreur part de l'intersection $A(2;1)$, livre un premier colis en $B(2;5)$, puis un second en $C(6;5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$, et vérifier ce résultat par un calcul direct à partir des coordonnées de A et de C .
3. Pour rentrer directement à son point de départ, quel vecteur le livreur doit-il suivre ? Donner ses coordonnées.
4. Sachant qu'il ne peut se déplacer que le long des rues et des avenues (jamais en diagonale), quelle distance totale, en nombre de blocs, a-t-il parcourue sur l'ensemble du trajet $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$?

43 *** [COM]

Rédaction complète

Rédiger une solution complète du problème suivant, avec introduction des points et conclusion.

$$A(-3;-1), \quad B(3;2), \quad C(5;6), \quad D(-1;3).$$

Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme, puis déterminer le centre de ce parallélogramme.