

**Objectif du TD.** Réinvestir les notions N01 à N05 : logique, ensembles, intervalles, arithmétique, calcul littéral, équations et inéquations. L'enjeu principal est de **choisir l'outil adapté**, de changer de forme et de conclure proprement en vue du DS1.

Cours associé : N06.

### A. Réactiver et sécuriser les bases

Identifier l'objet,

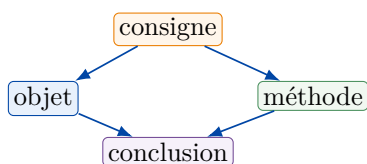
calculer, conclure

① ★ [COM]

Quelle tâche ?

Pour chaque consigne, indiquer l'objet mathématique et l'action attendue : calculer, résoudre, comparer, représenter ou justifier.

- a)  $3x - 5 = 16$       b)  $[-2; 5[$   
 c)  $(x + 4)^2 - 25$     d)  $84/126$   
 e) « tout multiple de 6 est pair ».



② ★ [CAL]

Calculs numériques

Calculer mentalement ou avec peu d'écriture.

$$A = 7 - 3(2 - 5), \quad B = \frac{3}{4} - \frac{5}{6}, \quad C = 0,25 \times 48, \quad D = \frac{2^5}{4}.$$

Pour chacun, préciser une étape de contrôle possible.

③ ★ [CAL]

Fractions irréductibles

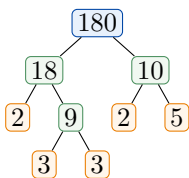
Simplifier jusqu'à obtenir une fraction irréductible.

$$\frac{84}{126}, \quad \frac{135}{180}, \quad \frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7}.$$

④ ★ [CAL]

Décomposition première

Compléter la décomposition de 180 en produit de facteurs premiers, puis en déduire celle de 360.



⑤ ★ [REP]

Appartenance

Compléter par  $\in$  ou  $\notin$ .

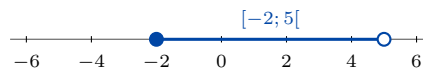
$$-3 \dots \mathbb{N}, \quad -3 \dots \mathbb{Z}, \quad \frac{7}{4} \dots \mathbb{D}, \quad \sqrt{2} \dots \mathbb{Q}, \quad 0,333 \dots \mathbb{D}.$$

Ajouter un exemple personnel dans chacun des ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

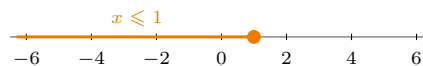
⑥ ★ [REP]

Intervalle et droite graduée

Lire l'intervalle représenté, puis écrire la phrase correspondante avec une inégalité.



Représenter ensuite  $] -\infty; 1]$ .



⑦ ★★ [REP]

Union ou intersection ?

On considère  $A = [-4; 2]$  et  $B = ]0; 5]$ . Déterminer :

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B.$$

Faire une droite graduée pour contrôler.

⑧ ★ [CAL]

Développer, réduire

Développer et réduire.

$$3(2x - 5) - 4(x + 1), \quad (x + 3)(x - 2), \quad (2x - 1)^2.$$

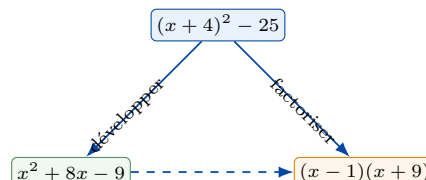
Indiquer la forme la plus utile pour calculer une valeur.

⑨ ★ [CAL]

Factoriser

Factoriser quand c'est possible.

$$5x + 20, \quad x^2 - 49, \quad 4x^2 - 12x, \quad (x + 2)^2 - 9.$$



⑩ ★ [CAL]

Équations flash

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis conclure avec  $\mathcal{S}$ .

$$x + 8 = 3, \quad 5x = 45, \quad 7 - 2x = 15, \quad (x - 4)(2x + 1) = 0.$$

⑪ ★ [CAL]

Inéquations flash

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis donner les solutions sous forme d'intervalle.

$$x - 5 < 2, \quad 3x \geq -12, \quad -2x + 1 \leq 9.$$

Préciser dans quel cas le sens de l'inégalité change.

⑫ ★★ [RAI]

Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier par une propriété ou un contre-exemple.

- a) Si  $x^2 = 16$ , alors  $x = 4$ .  
 b) Tout multiple de 15 est multiple de 5.  
 c)  $[-1; 3] \cap [2; 6] = [2; 3]$ .  
 d)  $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ .

## B. Choisir une forme et changer de registre Calcul

littéral, représentations, équivalences

**13** ★ [RAI]

Choisir la bonne forme

Pour chaque question, choisir entre forme développée, forme factorisée ou forme initiale.

$$E = (x - 3)(x + 7) = x^2 + 4x - 21.$$

1. Calculer  $E$  pour  $x = 0$ .
2. Résoudre  $E = 0$ .
3. Comparer  $E$  à  $x^2$ .
4. Déterminer le signe de  $E$  lorsque  $x = 10$ .

|                             |                         |
|-----------------------------|-------------------------|
| <b>Calculer</b>             | développer / réduire    |
| <b>Résoudre produit nul</b> | factoriser              |
| <b>Comparer</b>             | soustraire              |
| <b>Représenter</b>          | intervalle / droite     |
| <b>Démontrer</b>            | introduire une variable |

**14** ★★ [RAI]

Comparer sans valeur numérique

Comparer, pour tout réel  $x$ , les deux expressions :

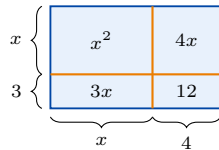
$$A = (x + 5)^2 \quad \text{et} \quad B = x^2 + 10x + 18.$$

Rédiger avec la différence  $A - B$ , puis conclure.

**15** ★★ [REP]

Aire décomposée

La figure représente un rectangle de dimensions  $x + 4$  et  $x + 3$ .

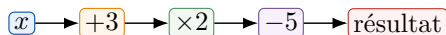


Écrire son aire sous forme développée, puis sous forme factorisée. Retrouver l'identité avec un calcul.

**16** ★★ [MOD]

Programme de calcul

Le programme ci-dessous est appliqué à un nombre  $x$ .



1. Écrire l'expression obtenue.
2. Pour quel nombre de départ obtient-on 17 ?
3. Existe-t-il un nombre qui donne le même résultat que le programme  $x \mapsto 3x + 1$  ?

**17** ★ [COM]

Résoudre par équivalences

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , en rédigeant par équivalences.

$$4(2x - 1) = 3x + 11, \quad \frac{x - 2}{3} = \frac{2x + 1}{6}.$$

Chaque résolution doit se terminer par  $\mathcal{S} = \dots$ .

**18** ★★ [CAL]

Produit nul

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

$$(x - 6)(x + 2) = 0, \quad (3x - 5)(2x + 1) = 0, \\ x^2 - 10x = 0, \quad x^2 - 81 = 0.$$

Préciser la forme utilisée.

**19** ★★ [RAI]

Valeurs interdites

Pour chaque expression, donner les valeurs interdites, puis simplifier si possible.

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4}, \quad \frac{3x(x + 2)}{x}, \quad \frac{2x - 6}{x + 1}.$$



$$x - 4 \neq 0$$

**20** ★★ [CAL]

Inéquations et intervalles

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis représenter les solutions.

$$5x - 7 \leq 18, \quad 4 - 3x > 13, \quad \frac{x + 2}{5} \geq -1.$$

**21** ★★ [REP]

Écriture d'un ensemble

Donner trois écritures différentes du même ensemble : phrase, inégalité et intervalle.

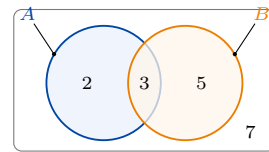
1. les réels strictement supérieurs à  $-2$  ;
2. les réels compris entre 1 et 7, avec 7 exclu.

Ajouter la représentation sur une droite graduée.

**22** ★★ [REP]

Diagramme d'ensembles

Dans le diagramme, les nombres 2, 3, 5, 7 sont placés.



Lire  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ , puis proposer une signification possible des ensembles  $A$  et  $B$ .

**23** ★★ [COM]

Erreur à corriger

Un élève écrit :

$$\begin{aligned} -3x + 4 &< 10 \\ -3x &< 6 \\ x &< -2. \end{aligned}$$

Repérer l'erreur, corriger la résolution et donner l'ensemble des solutions.

**24** ★★ [CAL]

Racines et carrés

Simplifier quand c'est possible.

$$\sqrt{50}, \quad \sqrt{72}, \quad \sqrt{3^2 \times 5}, \quad \sqrt{(x - 1)^2} \text{ pour } x \geq 1.$$

Expliquer pourquoi la dernière hypothèse est utile.

## C. Raisonner et modéliser

Justifier, contrôler, mettre en

équation

**25** ★★ [RAI]

Parité

Démontrer que la somme de deux entiers impairs est paire. La rédaction doit commencer par : « Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs. »

**26** ★★ [RAI]

Divisibilité

Démontrer que si un entier est multiple de 12, alors il est multiple de 3 et de 4. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

**27** \*\* [MOD]

Une balance à résoudre

Les deux plateaux ont la même masse.



Écrire l'équation associée, la résoudre et interpréter la valeur obtenue.

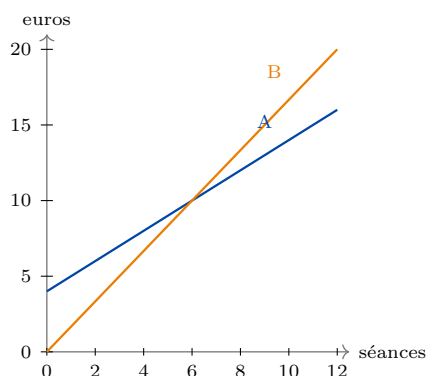
**28** \*\* [MOD]

Choisir un abonnement

Deux tarifs sont proposés pour une activité :

$$A : 4 + 1n \quad \text{et} \quad B : \frac{5}{3}n$$

où  $n$  est le nombre de séances.



Déterminer graphiquement puis algébriquement à partir de combien de séances le tarif A est plus avantageux.

**29** \*\* [MOD]

Contrainte géométrique

Un rectangle a pour dimensions  $x + 2$  et  $2x - 1$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Quelles contraintes doit vérifier  $x$  pour que les longueurs soient positives ?
2. Écrire son périmètre.
3. Pour quel  $x$  le périmètre vaut-il 34 ?

**30** \*\*\* [MOD]

Aire imposée

On veut que l'aire d'un rectangle de dimensions  $x + 5$  et  $x - 1$  soit égale à 40.

1. Écrire l'équation.
2. Développer puis ramener à une équation produit nul.
3. Résoudre et ne garder que les valeurs compatibles avec les longueurs.

**31** \*\* [REP]

Encadrer un nombre

On sait que  $x \in [-3; 2]$ . Déterminer un intervalle contenant :

$$x + 5, \quad -2x, \quad 3x - 1.$$

Faire attention au changement de sens quand on multiplie par un nombre négatif.

**32** \*\* [RAI]

Phrase logique

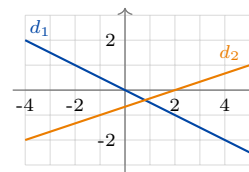
Pour chacune des phrases, écrire la négation puis dire si elle est vraie.

- a) Tous les entiers naturels sont positifs.
- b) Il existe un réel  $x$  tel que  $x^2 < 0$ .
- c) Pour tout réel  $x$ ,  $(x + 1)^2 \geq 0$ .

**33** \*\* [REP]

Deux droites, une équation

On observe les deux droites ci-dessous.



Estimer graphiquement l'abscisse de leur point d'intersection, puis expliquer ce que signifie cette abscisse pour une équation du type « expression 1 = expression 2 ».

**34** \*\* [RAI]

Contrôle de cohérence

Un élève résout un problème de longueur et obtient  $x = -5$ . Dans le problème, la longueur cherchée vaut  $x + 3$ .

1. Pourquoi le résultat doit-il être contrôlé ?
2. La valeur  $x = -5$  est-elle acceptable ?
3. Inventer une équation dont  $-5$  est solution mais qui ne convient pas au contexte.

**35** \*\* [RAI]

Répartir des viennoiseries

Un boulanger a confectionné un nombre  $N$  de croissants, avec  $80 \leq N \leq 120$ . Il veut les répartir en sachets de 6 sans qu'il en reste, et aussi en sachets de 8 sans qu'il en reste.



1. Traduire chacune des deux conditions par une phrase utilisant le mot « multiple ».
2. Justifier que  $N$  doit être un multiple de 24.
3. Déterminer toutes les valeurs possibles de  $N$ .

**36** \*\* [CH,MOD]

Combien de bus ?

Un collège organise une sortie pour 187 élèves. Chaque bus loué contient au maximum 52 places.



1. Combien de bus faut-il louer au minimum pour que tous les élèves aient une place ?

- Combien de places resteront alors inoccupées ?
- Le collège reçoit finalement 15 inscriptions supplémentaires. Faut-il louer un bus de plus ? Justifier.

### D. Synthèse et préparation du DS1 Problèmes longs et choix de stratégie

**37** \*\*\* [CAL,RAI]

Mini-sujet de synthèse

On pose

$$F = (x - 2)^2 - 16.$$

- Développer et réduire  $F$ .
- Factoriser  $F$ .
- Calculer  $F$  pour  $x = 0$ .
- Résoudre  $F = 0$ .
- Résoudre  $F < 0$  à l'aide d'une droite graduée ou d'un raisonnement sur le produit.

**38** \*\*\* [CH]

Enquête sur un nombre

Je suis un entier naturel inférieur à 100. Je suis multiple de 6, non multiple de 9, et mon reste dans la division par 5 est 2. Trouver toutes les possibilités, puis expliquer pourquoi la liste est complète.

**39** \*\*\* [MOD]

Tarif et seuil

Un club propose deux formules :

$$\text{Formule A : } 18 + 2n, \quad \text{Formule B : } 5n$$

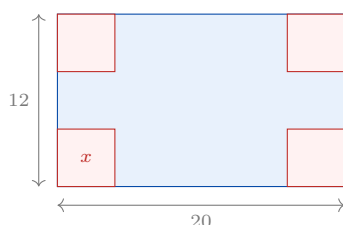
où  $n$  est un nombre entier de séances.

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $18 + 2n \leq 5n$ .
- Adapter la conclusion au fait que  $n$  est un entier naturel.
- Faire une phrase de conseil pour un utilisateur.

**40** \*\*\* [MOD]

Boîte sans couvercle

On découpe des carrés de côté  $x$  aux quatre coins d'une feuille rectangulaire 20 cm par 12 cm, puis on replie.



- Quelles contraintes doit vérifier  $x$  ?
- Exprimer les dimensions du fond de la boîte.
- Pour quelle valeur de  $x$  le fond a-t-il une aire de  $84 \text{ cm}^2$  ?

**41** \*\*\* [CH]

Nombre mystérieux

Un nombre réel  $x$  vérifie simultanément :

$$x \in [-5; 4[, \quad |x - 1| \leq 3, \quad 2x + 1 > -5.$$

Traduire chaque condition par un intervalle, puis déterminer l'ensemble des valeurs possibles de  $x$ .

**42** \*\*\* [RAI]

Preuve ou contre-exemple

Pour chaque affirmation, choisir entre démontrer ou donner un contre-exemple.

- Le carré d'un entier impair est impair.
- Si  $ab = 0$ , alors  $a = 0$  et  $b = 0$ .
- Si  $x > 2$ , alors  $x^2 > 4$ .
- Si  $x^2 > 4$ , alors  $x > 2$ .

**43** \*\*\* [COM]

Rédaction complète

Rédiger entièrement la résolution du problème suivant.

La somme de trois entiers consécutifs est 72. Quels sont ces trois entiers ?

La rédaction doit introduire l'inconnue, écrire l'équation, la résoudre par équivalences et conclure par une phrase.

**44** \*\*\* [CH,RAI]

Défi DS1

Trouver tous les réels  $x$  tels que

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} \leq 8$$

en respectant les étapes :

- préciser la valeur interdite ;
- simplifier l'expression quand c'est autorisé ;
- résoudre l'inéquation obtenue ;
- vérifier que la valeur interdite n'est pas réintroduite ;
- conclure avec un intervalle privé d'un point si nécessaire.