

Objectif de travail. Ce TD prolonge le cours : règles de puissances et de racines, formes développée/factorisée/réduite, identités remarquables, choix de la forme adaptée, isolement d'une variable et comparaison de quantités. Les exercices alternent calculs rapides, schémas d'aires, programmes de calcul, formules issues d'autres disciplines et problèmes de synthèse.

A – Réactivation automatiser les règles avant de choisir une forme

1 ★ [CAL]

Puissances : regrouper les facteurs

Écrire sous la forme a^n , avec $n \in \mathbb{Z}$, lorsque c'est possible.

$$2^6 \times 2^{-4} ; \quad \frac{5^3}{5^{-2}} ; \quad (7^{-1})^4 ; \quad 3^2 \times 4^2.$$

2 ★ [CAL]

Changer d'écriture

Compléter.

$$10^{-3} = \frac{1}{\dots} ; \quad 6,2 \times 10^4 = \dots ; \quad 0,00047 = \dots \times 10^{\dots}.$$

Puis écrire 45×10^{-5} en notation scientifique.

3 ★ [CAL]

Racines carrées à simplifier

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit possible.

$$\sqrt{48} ; \quad \sqrt{98} ; \quad \sqrt{175} ; \quad \sqrt{300} ; \quad \sqrt{12} + \sqrt{75}.$$

4 ★★ [RAI]

Vigilance : racine et signe

Compléter le tableau.

x	-5	0	3
$\sqrt{x^2}$			
$ x $			

Conclure par une phrase : pourquoi $\sqrt{x^2}$ n'est-il pas toujours égal à x ?

5 ★ [CAL]

Priorités et substitutions

Pour $x = -2$, calculer :

$$A = 3x^2 - 5x + 1, \quad B = (3x - 5)^2, \quad C = 3(x - 5)^2.$$

Indiquer, pour chaque expression, l'opération faite en premier.

6 ★ [CAL]

Réduire une expression

Réduire.

$$4x + 7 - 2x + 5 ; \quad 3a^2 - 5a + 4a^2 + 9a ; \quad 2x(x + 1) - x^2.$$

7 ★ [REP]

Reconnaître une forme

Classer les expressions suivantes dans un tableau : développée, factorisée, réduite, non réduite.

$$(x+3)^2, \quad x^2+6x+9, \quad 5x+2x-1, \quad (2x-1)(x+4), \quad 7x^2-3.$$

8 ★ [CAL]

Développer sans piège

Développer et réduire.

$$5(x + 2), \quad -3(2x - 7), \quad x(x - 4), \quad (x + 3)(x - 2).$$

9 ★★ [RAI]

Erreur à repérer

Un élève écrit :

$$\begin{aligned} (x + 4)^2 &= x^2 + 16, \\ \sqrt{49 + 16} &= 7 + 4, \\ 2(x + 5) &= 2x + 5. \end{aligned}$$

Pour chaque ligne, dire si elle est vraie ou fausse. Corriger les égalités fausses.

10 ★★ [REP]

Mini-arbre de calcul

Le schéma représente une expression.



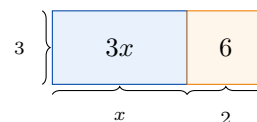
1. Écrire l'expression obtenue.
2. Calculer sa valeur pour $x = 4$, puis pour $x = -1$.
3. Développer l'expression.

B – Applications directes développer, factoriser, utiliser une identité remarquable

11 ★ [REP, CAL]

Aire et distributivité

Dans la figure, les longueurs sont en unités.



1. Écrire l'aire du grand rectangle sous forme factorisée.
2. Écrire cette même aire sous forme développée.
3. Quelle propriété vient-on d'illustrer ?

12 ★ [CAL]

Double distributivité

Développer et réduire.

$$\begin{aligned} (x + 5)(x + 2), \quad (2x - 3)(x + 4), \\ (4 - 3x)(x - 2), \quad (2x + 1)(3x - 5). \end{aligned}$$

13 ★ [CAL]

Identités remarquables : développer

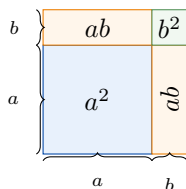
Développer en utilisant une identité remarquable.

$$(x + 7)^2, \quad (3x - 2)^2, \quad (5 - 2x)^2, \quad (4x - 1)(4x + 1).$$

14 ★★ [REP, CAL]

Le carré du cours

Le carré ci-dessous a pour côté $a + b$.



1. Retrouver graphiquement l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Appliquer avec $a = 2x$ et $b = 3$.

15 ★ [CAL]

Factoriser par facteur commun

Factoriser.

$$6x + 18, \quad 5x^2 - 10x, \quad 12ab + 8a, \quad (x+2)(x-1) + 3(x+2).$$

16 ★ [CAL]

Factoriser par identité remarquable

Factoriser.

$$x^2 + 10x + 25, \quad 9x^2 - 12x + 4, \quad 16x^2 - 81, \quad 49 - (x+1)^2.$$

17 ★★ [RAI]

Du bon côté de l'identité

Compléter par une expression.

$$\begin{aligned} x^2 + \dots + 36 &= (x+6)^2, \\ 4x^2 - \dots + 25 &= (2x-5)^2, \\ \dots - 64 &= (3x-8)(3x+8). \end{aligned}$$

18 ★★ [RAI]

Choisir entre développer et factoriser

Pour chaque objectif, choisir la forme la plus utile de

$$E = (x-4)^2 - 9 = (x-7)(x-1) = x^2 - 8x + 7.$$

1. Calculer E pour $x = 10$.
2. Résoudre mentalement $E = 0$.
3. Comparer E à $x^2 - 8x$.
4. Trouver l'image de 4.

19 ★★ [MOD, CAL]

Programme de calcul et formes

On considère le programme :



1. Écrire l'expression $P(x)$ obtenue.
2. Développer et réduire $P(x)$.
3. Factoriser $P(x)$ en utilisant une identité remarquable.
4. Quelle forme permet de calculer rapidement $P(97)$?

20 ★★ [CAL]

Isoler une variable

Dans chaque formule, exprimer la variable demandée en fonction des autres.

$$\begin{aligned} U &= RI && \text{isoler } R, \\ d &= vt && \text{isoler } t, \\ V &= \pi r^2 h && \text{isoler } h, \\ S &= \pi r^2 && \text{isoler } r. \end{aligned}$$

Préciser les conditions nécessaires lorsque c'est utile.

21 ★★ [MOD]

Lire une formule géométrique

Un rectangle de longueur $x+5$ et de largeur $x-2$ est représenté par quatre zones.

x^2	$5x$
$-2x$	-10

1. Développer $(x+5)(x-2)$.
2. Interpréter le terme -10 dans le découpage formel.
3. Pour quelles valeurs de x le rectangle existe-t-il vraiment ?

22 ★★ [RAI, CAL]

Comparer par une différence

On pose $A = (x+5)^2$ et $B = x^2 + 10x + 20$.

1. Calculer $A - B$.
2. Que peut-on conclure pour tout réel x ?
3. Représenter l'écart constant par une phrase.

C – Approfondissement

choisir, justifier, corriger,

généraliser

23 ★★ [RAI, CAL]

Équations : la forme factorisée aide

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en choisissant d'abord une forme utile.

$$(x-3)(x+5) = 0, \quad (x+4)^2 - 25 = 0, \quad x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Conclure chaque fois par un ensemble de solutions $\mathcal{S} = \dots$.

24 ★★ [MOD, RAI]

Rectangles presque égaux

Deux rectangles ont pour aires :

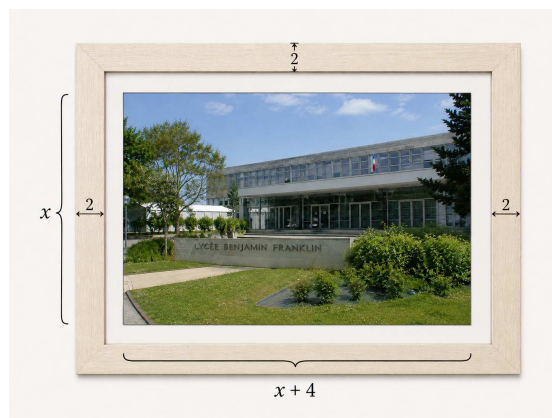
$$A = (x+6)(x+2), \quad B = (x+4)^2.$$

1. Développer A et B .
2. Comparer A et B sans choisir une valeur de x .
3. Faire un petit schéma qui explique l'écart trouvé.

25 ★★ [MOD, CAL]

Cadre autour d'une photo

Une photo mesure x cm sur $x+4$ cm. On ajoute un cadre de largeur 2 cm tout autour.



1. Exprimer l'aire totale avec cadre.
2. Exprimer l'aire de la photo.
3. En déduire l'aire du cadre seul, puis la réduire.

26 ★★ [MOD, CAL]

Formule inversée

Le volume d'un cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

1. Exprimer h en fonction de V , r et π .
2. Exprimer r en fonction de V , h et π , avec $r \geq 0$.
3. Pourquoi faut-il préciser une condition sur h ou r ?

27 ** [RAI]

Développer ou ne pas développer ?

On donne $F = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 3)$.

1. Factoriser F par le facteur commun $2x - 1$.
2. Développer et réduire F .
3. Quelle forme est la plus adaptée pour résoudre $F = 0$?

28 ** [RAI, COM]

Le piège du carré

Voici deux propositions.

$$P1 : (a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad P2 : (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

1. Donner un contre-exemple à P1.
2. Démontrer P2 par le calcul.
3. Illustrer P2 par un schéma d'aires lorsque $a > b > 0$.

29 *** [CAL, RAI]

Trois termes au carré

Développer $(a + b + c)^2$ en le voyant comme $((a + b) + c)^2$. Puis appliquer la formule obtenue à $(x + 2y - 3)^2$.

30 *** [CAL]

Cube d'un binôme

Développer $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$, puis en déduire le développement de $(2x - 1)^3$. Présenter les étapes sans sauter de ligne de calcul essentielle.

31 ** [RAI, MOD]

Comparer par quotient

Deux prix positifs vérifient $P_1 = 1,18P_0$ et $P_2 = P_0 + 18$.

1. Que signifie $P_1 = 1,18P_0$?
2. Pour $P_0 = 100$, comparer P_1 et P_2 .
3. Pour $P_0 = 200$, comparer P_1 et P_2 .
4. Trouver par le calcul la valeur de P_0 pour laquelle les deux prix sont égaux.

32 *** [CH, RAI]

Une identité cachée

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on veut comparer $\frac{a + b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.

1. Développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.
2. En déduire que $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.
3. Conclure : $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

33 ** [REP, RAI]

Tableau de choix

Compléter le tableau pour l'expression $G = (x + 2)^2 - 16 = x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$.

Question	Forme choisie	Pourquoi ?
$G = 0$		
$G(10)$		
$G + 12$		
$G < 0$ mentalement		

34 ** [COM, RAI]

Rédiger une comparaison

On pose $M = x^2 + 2x + 5$ et $N = (x + 1)^2$. Rédiger une solution complète pour comparer M et N pour tout réel x . La rédaction doit introduire les objets comparés et se terminer par une phrase.

D – Synthèse et problèmes

modéliser, relier plusieurs

formes, rédiger

35 ** [MOD, RAI, CAL]

Deux programmes rivaux

On compare deux programmes.

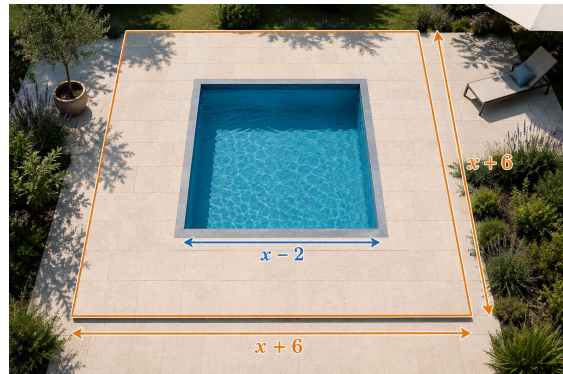
Programme A	Programme B
choisir x	choisir x
ajouter 4	mettre au carré
mettre au carré	ajouter $8x$
	ajouter 10

1. Écrire les expressions $A(x)$ et $B(x)$.
2. Développer $A(x)$.
3. Comparer $A(x)$ et $B(x)$ pour tout réel x .
4. Inventer un programme C qui donne toujours deux unités de moins que A.

36 *** [MOD, REP]

Dallage algébrique

Une terrasse carrée de côté $x + 6$ contient une piscine carrée de côté $x - 2$, avec $x > 2$.

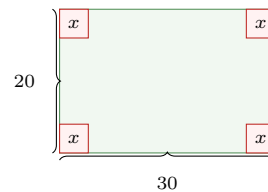


1. Exprimer l'aire dallée.
2. Factoriser cette aire.
3. Interpréter la factorisation obtenue comme une différence de deux carrés.

37 *** [MOD, CAL]

Boîte sans couvercle

On découpe des carrés de côté x dans les quatre coins d'une feuille 30 cm par 20 cm, puis on replie.

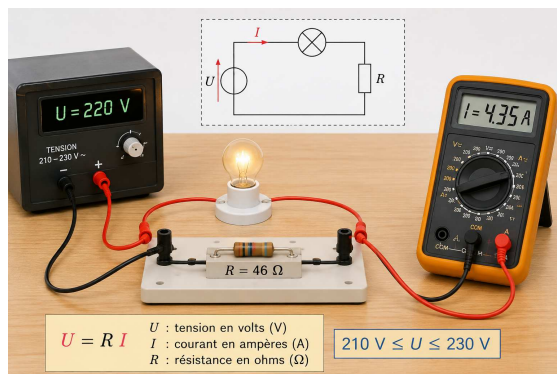


1. Exprimer les dimensions de la base après découpe.
2. Exprimer le volume de la boîte.
3. Développer partiellement pour obtenir $V = x(30 - 2x)(20 - 2x)$.
4. Quelles valeurs de x sont possibles ?

38 ** [MOD, CAL]

Électricité et isolement

Dans un circuit, $U = RI$. Un appareil fonctionne si la tension est comprise entre 210 V et 230 V. On a $R = 46 \Omega$.



1. Exprimer I en fonction de U et R .
2. Calculer l'intervalle de valeurs possibles de I .
3. Un courant de 4,7 A convient-il? Justifier.

39 *** [MOD, RAI]

Distance de freinage

Une formule simplifiée donne une distance de freinage

$$d = \frac{v^2}{2a}, \text{ où } v > 0 \text{ et } a > 0.$$

1. Exprimer a en fonction de d et v .
2. Exprimer v en fonction de d et a .
3. Si la vitesse est multipliée par 2, par combien la distance est-elle multipliée, à a fixé?

40 ** [RAI, COM]

Vrai ou faux argumenté

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier par un calcul, un contre-exemple ou une propriété.

1. Pour tout réel x , $(x - 1)^2 = x^2 - 1$.
2. Pour tout réel x , $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$.
3. Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
4. Pour tout réel x , $x^2 + 1 > x$.

41 *** [REP, CH]

Carte des formes

Construire une carte autour de l'expression

$$H = (x + 1)^2 - (x - 5)^2.$$

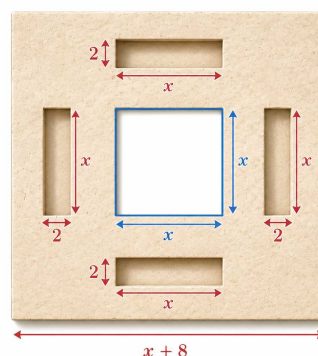
Elle doit contenir :

- une forme développée et réduite ;
- une forme factorisée ;
- une question que chaque forme permet de traiter efficacement ;
- un mini-schéma ou une flèche expliquant la transformation.

42 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Problème final : choisir la bonne forme

Un artisan fabrique une plaque décorative. La partie extérieure est un carré de côté $x + 8$. Au centre, il retire un carré de côté x , puis quatre rectangles de dimensions x par 2.



1. Écrire l'aire restante sous une forme avec des parenthèses.
2. Développer et réduire cette aire.
3. Factoriser si possible.
4. Pour $x = 12$, calculer l'aire restante avec la forme la plus rapide.
5. Rédiger une phrase qui explique le choix de la forme utilisée.