

TD N03 — Arithmétique

Multiples, diviseurs, fractions irréductibles — Seconde générale et technologique

Objectif. Passer du calcul à la structure des entiers : reconnaître des multiples, utiliser des restes, réduire des fractions et rédiger de petites démonstrations.

Conseils. Ne pas confondre « b divise a » et « a divise b ». Pour une fraction, simplifier par des *facteurs*, pas par des chiffres. Les exercices *** sont des approfondissements.

A — Réactivation et automatismes

1 ★ [CAL]

Compléter par | ou $\nmid$.

3 ... 48, 5 ... 132, 7 ... 91,
8 ... 104, 9 ... 144, 11 ... 275.

2 ★ [CAL]

Écrire les dix premiers multiples positifs de 6, puis ceux de 9. Entourer les multiples communs inférieurs à 80.

3 ★ [REP, CAL]

Sur la droite ci-contre, colorier les multiples de 4 et placer au-dessus les multiples de 6. Quels sont les multiples communs représentés ?



4 ★ [CAL]

Donner le quotient et le reste dans chaque division euclidienne.

division	quotient	reste
137 par 5		
248 par 12		
999 par 37		
2026 par 9		

5 ★ [REP]

Traduire chaque phrase par une égalité avec un entier k .

- a est un multiple de 7.
- n est pair.
- m est impair.
- 96 est divisible par d .

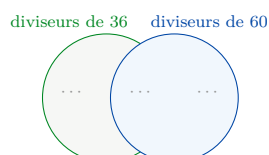
6 ★ [CAL]

Indiquer si chaque entier est pair ou impair, puis prévoir la parité de son carré.

17, 24, 101, 348, 999, $10^4 + 3$.

7 ★ [REP]

Compléter le schéma : écrire au centre les diviseurs communs à 36 et 60, à gauche les diviseurs de 36 seulement, à droite ceux de 60 seulement.



8 ★ [CAL]

Simplifier mentalement.

$\frac{18}{24}$, $\frac{35}{50}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{63}{81}$, $\frac{84}{98}$, $\frac{120}{150}$.

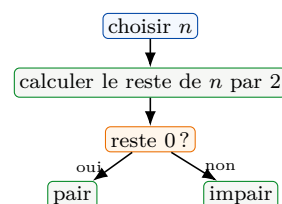
9 ★★ [RAI]

Vrai ou faux ? Justifier par un calcul ou un contre-exemple.

- Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 2.
- Si un nombre est divisible par 2, alors il est divisible par 4.
- Si $3 \mid a$ et $3 \mid b$, alors $3 \mid (a + b)$.
- Si $5 \mid (a + b)$, alors $5 \mid a$ et $5 \mid b$.

10 ★★ [REP, CAL]

On lance la machine ci-contre avec un entier n . Compléter le tableau pour $n = 18, 19, 20, 21, 22$. Que repère cette machine ?



n	reste par 2	sortie
18		
19		
20		
21		
22		

B — Critères, restes et chiffres manquants

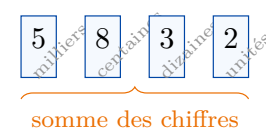
11 ★ [CAL]

Pour chaque nombre, dire s'il est divisible par 2, 3, 5, 9, 10 et 11.

246, 735, 1001, 2079, 9416, 12321.

12 ★ [REP, CAL]

Le nombre 5832 est représenté par colonnes. Utiliser le dessin pour tester la divisibilité par 9, puis par 11.



13 ★★ [CAL, RAI]

Compléter chaque phrase.

- $74\Box$ est divisible par 3 lorsque le chiffre manquant est ...
- $8\Box5$ est divisible par 9 lorsque le chiffre manquant est ...

3. $32\boxed{}6$ est divisible par 5 lorsque le chiffre manquant est ...
4. $4\boxed{}7\boxed{}$ est divisible par 10 lorsque le dernier chiffre est ...

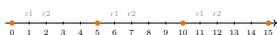
14 ** [CAL, RAI]

Trouver tous les chiffres x possibles.

- $52x$ est divisible par 4.
- $31x5$ est divisible par 9.
- $7x2$ est divisible par 11.
- $2x8x$ est divisible par 3 et par 5.

15 ** [REP, CAL]

Compléter le tableau des restes de n dans la division par 5, puis colorier les lignes où n est un multiple de 5.



n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
r										

16 * [CAL]

Calculer le reste de la division par 9 en utilisant la somme des chiffres.

742, 5 306, 12 345, 98 765, 700 002, 444 444.

17 ** [CAL, RAI]

Pour chacun des nombres suivants, calculer la somme alternée des chiffres et conclure pour la divisibilité par 11.

1 001, 2 753, 5 918, 91 828, 738 617.

18 ** [RAI]

On sait qu'un entier N est divisible par 9. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont certaines ?

- N est divisible par 3.
- $N + 9$ est divisible par 9.
- $N + 3$ est divisible par 9.
- $2N$ est divisible par 9.

19 ** [MOD, CAL]

Une salle de spectacle possède 312 sièges. On veut faire des rangées contenant toutes le même nombre de sièges, sans reste. Parmi les nombres proposés, lesquels conviennent ?



8, 9, 12, 13, 24, 26.

20 ** [CAL, RAI]

Le code d'un cadenas est un nombre de quatre chiffres $A = 4a5b$.

- Déterminer tous les couples de chiffres (a, b) pour lesquels A est divisible par 9.
- Parmi ces codes, garder seulement ceux qui sont pairs.

3. Parmi les codes restants, lesquels sont divisibles par 11 ?

21 ** [MOD, CAL]

Un fleuriste a 156 roses et 204 tulipes. Il veut préparer des bouquets identiques, sans fleur restante.

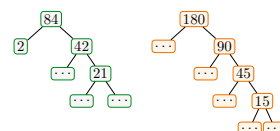
- Dire si 6, 12, 18, 24 bouquets sont possibles.
- Pour chaque nombre possible, donner la composition d'un bouquet.
- Chercher le plus grand nombre de bouquets possible parmi les quatre propositions.



C — Fractions irréductibles et facteurs premiers

22 * [CAL, REP]

Compléter les deux arbres de facteurs, puis écrire les décompositions en facteurs premiers.



23 * [CAL]

Décomposer en produits de facteurs premiers.

60, 72, 98, 126, 225, 360.

24 * [CAL]

Rendre irréductibles les fractions suivantes.

$$\frac{24}{36}, \frac{45}{75}, \frac{91}{119}, \frac{144}{168}, \frac{210}{330}, \frac{425}{500}.$$

25 ** [CAL]

Simplifier en utilisant les décompositions proposées.

$$\frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7}, \frac{3 \times 5^2 \times 11}{2 \times 5 \times 11^2}, \frac{2^4 \times 7^2}{2 \times 3 \times 7}.$$

26 ** [REP, CAL]

Dans la grille, chaque case contient un facteur. Tracer un chemin du numérateur au dénominateur en reliant les facteurs communs de 180 et 252, puis réduire $\frac{180}{252}$.

180	2	2	3	3	5
252	2	2	3	3	7

27 ** [CAL]

Effectuer les calculs, puis donner le résultat sous forme irréductible.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18}, \frac{11}{20} - \frac{3}{8}, \frac{14}{15} \times \frac{25}{21}, \frac{9}{10} \div \frac{27}{35}.$$

28 ** [RAI]

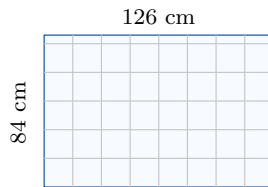
Sans calculatrice, dire si les fractions suivantes sont irréductibles. Justifier.

$$\frac{77}{143}, \frac{64}{81}, \frac{221}{391}, \frac{187}{255}.$$

Indication : chercher des diviseurs premiers simples.

(29) ** [REP, CAL]

Un rectangle de dimensions 84 cm par 126 cm est découpé en carrés identiques, sans reste. Parmi les côtés proposés, lesquels conviennent ?



6 cm, 7 cm, 12 cm, 14 cm, 21 cm, 28 cm.

(30) ** [MOD, CAL]

Une recette utilise $\frac{45}{120}$ L de lait par personne.

1. Écrire cette quantité sous forme irréductible.
2. Combien de litres faut-il pour 8 personnes ?
3. On dispose de 3 L. Combien de personnes peut-on servir ?

(31) *** [RAI, CAL]

Un élève affirme :

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \quad \text{car on barre le chiffre 6.}$$

La conclusion est correcte, mais le raisonnement ne l'est pas.

1. Expliquer précisément pourquoi le raisonnement est faux.
2. Donner une justification correcte de l'égalité.
3. Trouver une fraction où « barrer un chiffre commun » donne un résultat faux.

(32) *** [RAI]

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Que peut-on dire de la fraction $\frac{3a}{3b}$? Est-elle toujours irréductible ? Est-elle toujours égale à $\frac{a}{b}$? Justifier.

(33) *** [RAI]

Écrire la négation de chaque affirmation, puis dire si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. Tous les multiples de 10 sont divisibles par 5.
2. Il existe un multiple de 6 qui est impair.
3. Tous les nombres premiers sont impairs.
4. Il existe un diviseur commun à 35 et 48 strictement supérieur à 1.

D — Synthèse, raisonnement et problèmes

(34) ** [RAI]

Démontrer les trois propriétés suivantes sur la parité, en introduisant clairement les entiers utilisés dans chaque rédaction.

1. La somme de deux nombres pairs est paire.

2. La somme de deux nombres impairs est paire.
3. Le produit d'un nombre pair par un nombre entier est pair.

(35) *** [RAI]

Démontrer que si n est impair, alors n^2 est impair. Puis expliquer pourquoi cette démonstration ne prouve pas la réciproque.

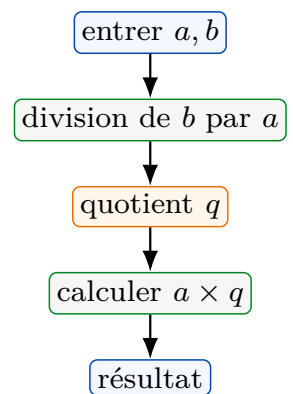
(36) *** [MOD, RAI]

Un jeu de société contient 96 cartes rouges et 144 cartes noires. On veut fabriquer des paquets identiques, avec au moins une carte rouge et une carte noire dans chaque paquet.

1. Le nombre de paquets doit-il être un diviseur de 96, de 144, ou des deux ?
2. Peut-on faire 16 paquets ? 24 paquets ? 32 paquets ?
3. Quel est le plus grand nombre de paquets possible parmi ces trois propositions ?

(37) *** [MOD, CAL]

On veut trouver le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b . Compléter l'algorithme et l'appliquer à $a = 17$, $b = 250$.



$$b = a \times q + r, \quad 0 \leq r < a.$$

$$250 = 17 \times \dots + \dots, \quad \text{plus grand multiple : } \dots$$

(38) *** [CH, MOD, RAI]

On cherche tous les nombres de trois chiffres $\overline{abc}$ tels que :

$$\begin{aligned} \overline{abc} &\text{ est divisible par 9,} \\ \overline{abc} &\text{ est divisible par 11,} \\ a + b + c &\leq 18. \end{aligned}$$

1. Écrire les deux conditions portant sur les chiffres a, b, c .
2. Tester quelques exemples et organiser la recherche dans un tableau.
3. Donner tous les nombres trouvés.

(39) *** [CH, RAI]

Défi. On choisit deux entiers consécutifs n et $n + 1$.

1. Tester avec $n = 4$, puis $n = 7$.
2. Quelle est toujours la parité du produit $n(n + 1)$?
3. Rédiger une démonstration par disjonction de cas : n pair ou n impair.