

**Objectif.** Apprendre à nommer les objets mathématiques, passer d'un registre à l'autre (phrase, symbole, diagramme, droite graduée, tableau) et justifier avec précision.

**Conseils.** Les réponses courtes doivent quand même être lisibles : écrire les symboles correctement, distinguer  $x \in A$  et  $A \subset B$ , et donner un contre-exemple lorsqu'une affirmation générale est fausse.

## A — Réactivation et automatismes

① ★ [REP, CAL]

On donne les nombres

$$-4 ; -1,2 ; 0 ; \frac{3}{5} ; 2 ; \frac{14}{7} ; \sqrt{9} ; \sqrt{2}.$$

Compléter le tableau.

| Ensemble     | Nombres de la liste qui appartiennent à cet ensemble |
|--------------|------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$ |                                                      |
| $\mathbb{Z}$ |                                                      |
| $\mathbb{Q}$ |                                                      |
| $\mathbb{R}$ |                                                      |

② ★ [CAL]

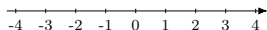
Calculer sans calculatrice, puis simplifier si possible.

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad B = 2 - \frac{7}{3},$$

$$C = \frac{5}{12} \times \frac{18}{25}, \quad D = 3(2x - 5) - 2(x + 1).$$

③ ★ [REP]

Sur la droite graduée, placer les nombres  $-3$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $2,5$  et  $\sqrt{9}$ . Puis écrire ceux qui appartiennent à l'intervalle  $[-1; 3[$ .



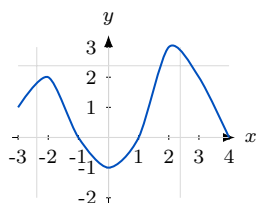
④ ★ [CAL]

Résoudre les équations d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ . Conclure par  $\mathcal{S} = \dots$ .

$$3x - 7 = 11, \quad 5 - 2x = 17, \quad \frac{x}{4} + 3 = 1.$$

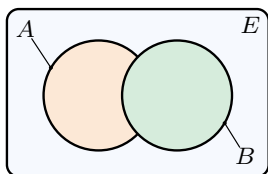
⑤ ★ [REP, CAL]

Le graphique représente une fonction  $f$ . Lire  $f(-2)$ ,  $f(0)$ , un antécédent de 2, puis les solutions graphiques de  $f(x) = 0$ .



⑥ ★ [REP, RAI]

On lance un dé équilibré à six faces. On note  $A$  : « le résultat est pair » et  $B$  : « le résultat est supérieur ou égal à 4 ». Compléter le diagramme, puis écrire  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .



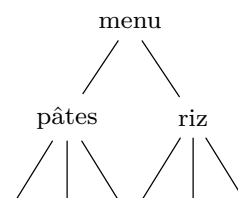
⑦ ★ [REP]

Dans chaque cas, écrire  $V$  si la phrase est une proposition mathématique,  $F$  si elle n'en est pas une.

| Phrase                              | V/F |
|-------------------------------------|-----|
| $5 + 7 = 12$                        |     |
| $x + 3 = 10$                        |     |
| Tracer une belle figure             |     |
| Tous les carrés sont des rectangles |     |
| Quel nombre préfères-tu ?           |     |

⑧ ★ [REP, CAL]

Un menu comporte deux plats  $P = \{\text{pâtes; riz}\}$  et trois desserts  $D = \{\text{fruit; yaourt; gâteau}\}$ . Compléter l'arbre des couples (*plat; dessert*), puis déterminer  $\text{Card}(P \times D)$ .



## B — Applications directes

⑨ ★ [REP, CAL]

On considère

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\},$$

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\},$$

$$B = \{1; 2; 3; 5; 8\}.$$

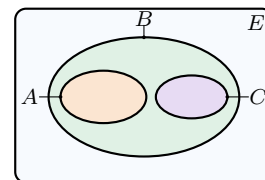
Déterminer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $E \setminus A$ ,  $\text{Card}(A)$  et  $\text{Card}(A \cap B)$ .

⑩ ★ [REP]

Dans le diagramme, écrire les nombres de  $E$  dans la bonne zone. Ensuite, compléter :

$$A \subset \dots \quad C \subset \dots$$

$$A \cap C = \dots$$

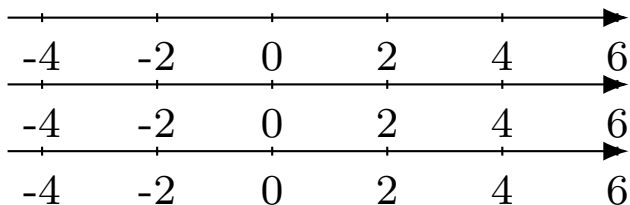


Données :  $A = \{2; 4\}$ ,  $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ,  $C = \{3; 6\}$ .

⑪ ★★ [REP, CAL]

Pour chaque ligne, représenter les deux intervalles sur une droite, puis déterminer l'intersection et la réunion.

| $I$             | $J$       | $I \cap J$ | $I \cup J$ |
|-----------------|-----------|------------|------------|
| $[-3; 4]$       | $[1; 6]$  |            |            |
| $] -\infty; 2]$ | $[-1; 5[$ |            |            |
| $[-4; -1[$      | $[0; 3]$  |            |            |



**12** ★ [REP]

Traduire chaque phrase par une notation ensembliste.

1.  $x$  appartient à  $A$ .
2.  $x$  n'appartient pas à  $B$ .
3.  $A$  est inclus dans  $B$ .
4. Les éléments qui sont dans  $A$  et dans  $B$ .
5. Les éléments de  $E$  qui ne sont pas dans  $A$ .

**13** ★★ [REP, RAI]

Compléter par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$ .

| Affirmation                  | Symbole |
|------------------------------|---------|
| $3 \dots \{1; 3; 5\}$        |         |
| $\{3\} \dots \{1; 3; 5\}$    |         |
| $\{1; 5\} \dots \{1; 3; 5\}$ |         |
| $\{0; 1\} \dots \{1; 3; 5\}$ |         |
| $0 \dots \mathbb{N}$         |         |

Expliquer en une phrase la différence entre les deux premières lignes.

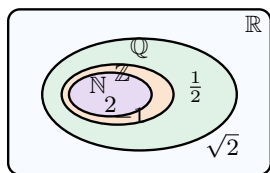
**14** ★★ [RAI, COM]

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.
2. Tous les nombres rationnels sont des nombres décimaux.
3. Si un nombre est multiple de 12, alors il est multiple de 3.
4. Si un nombre est multiple de 3, alors il est multiple de 12.

**15** ★★ [REP, RAI]

À partir du schéma, écrire deux implications vraies et une implication fausse. Pour l'implication fausse, donner un contre-exemple pris dans le diagramme.



**16** ★ [REP, COM]

Écrire la négation de chaque proposition.

1.  $x < 5$ .
2.  $x \in A$ .
3. « Le nombre  $n$  est pair et positif. »
4. « Tous les élèves ont rendu la feuille. »
5. « Il existe un nombre de la liste qui est négatif. »

**17** ★★ [RAI, COM]

Pour chaque implication, écrire sa réciproque. Dire ensuite si l'implication et sa réciproque sont vraies.

1. Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un rectangle.

2. Si  $x = 4$ , alors  $x^2 = 16$ .

3. Si un entier est divisible par 10, alors il est divisible par 5.

**18** ★★ [RAI, COM]

Rédiger proprement la démonstration suivante.

**Énoncé.** Montrer que si un entier est multiple de 18, alors il est multiple de 3 et de 6.

Aide : introduire un entier  $n$ , puis écrire  $n = 18k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

## C — Entraînement approfondi

**19** ★★ [RAI, COM]

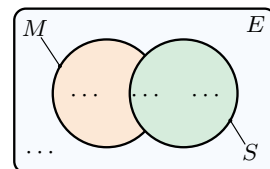
Un élève écrit :

$$2 \subset \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \{1; 2; 3\} \in \mathbb{N}.$$

Identifier les deux erreurs, puis corriger les écritures.

**20** ★★ [REP, RAI]

Une enquête porte sur 30 élèves : 18 jouent d'un instrument, 14 pratiquent un sport, 8 font les deux. Compléter le diagramme, puis calculer le nombre d'élèves qui ne font ni musique ni sport.



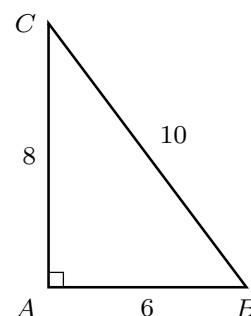
**21** ★★ [RAI, COM]

Dire si les phrases suivantes sont équivalentes. Justifier par une démonstration courte ou par un contre-exemple.

1.  $x = 2$  et  $2x = 4$ .
2.  $x = 3$  et  $x^2 = 9$ .
3. «  $n$  est divisible par 6 » et «  $n$  est divisible par 2 et par 3 ».

**22** ★★ [RAI, COM]

Dans le triangle ci-contre,  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  et  $BC = 10$ . Un élève veut montrer que le triangle est rectangle en  $A$  et écrit : « D'après le théorème de Pythagore, le triangle est rectangle. » Expliquer précisément ce qui ne va pas, puis nommer le théorème réellement utilisé.



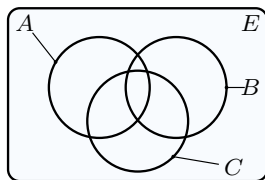
**23** ★★ [RAI]

Écrire la contraposée de chaque implication. Puis dire laquelle est la plus utile pour démontrer la conclusion indiquée.

1. Si un entier est divisible par 4, alors il est pair.
2. Si un triangle est rectangle, alors le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres.
3. Si un nombre appartient à  $A \cap B$ , alors il appartient à  $A$ .

**24** \*\* [REP, RAI]

On donne trois zones  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dans l'univers  $E$ . Écrire en langage courant les ensembles suivants, puis colorier mentalement la zone demandée :



$$A \cap B, \quad A \cup C, \\ E \setminus (A \cup B), \quad (A \cap B) \cup C.$$

**25** \*\* [RAI, CAL, COM]

Raisonnement par disjonction de cas.

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

Aide : distinguer les deux cas « le premier entier est pair » et « le premier entier est impair ».

**26** \*\*\* [RAI, COM]

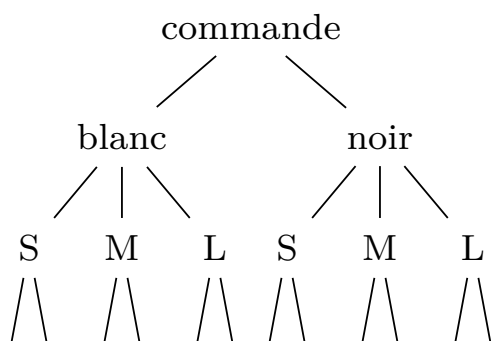
Raisonnement par l'absurde.

Montrer qu'il n'existe pas d'entier  $n$  tel que  $2n + 1$  soit pair.

Aide : supposer le contraire, c'est-à-dire supposer que  $2n + 1 = 2k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , puis obtenir une contradiction sur la parité.

**27** \*\* [MOD, REP]

Une association propose deux choix de tee-shirt  $T = \{\text{blanc; noir}\}$ , trois tailles  $S = \{S; M; L\}$  et deux logos  $G = \{\text{lion; étoile}\}$ . On modélise une commande par un triplet  $(t; s; g)$ . Combien de commandes différentes sont possibles ? Représenter l'organisation par un arbre ou un tableau.



**28** \*\* [RAI, COM]

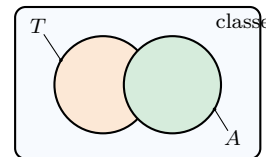
On considère la proposition : « Tous les nombres dont le carré vaut 16 sont positifs. »

1. La proposition est-elle vraie ?
2. Écrire sa négation en langage courant.
3. Donner l'ensemble de tous les nombres réels dont le carré vaut 16.

**D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative**

**29** \*\*\* [CH, MOD, REP]

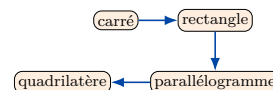
Dans une classe de 35 élèves, 21 ont choisi l'option théâtre, 16 l'option arts plastiques et 9 ont choisi les deux options. On note  $T$  et  $A$  les deux ensembles. Construire un diagramme complet, puis répondre :



1. Combien d'élèves ont choisi au moins une des deux options ?
2. Combien n'en ont choisi aucune ?
3. La phrase « choisir théâtre ou arts plastiques » correspond-elle ici à  $T \cap A$  ou à  $T \cup A$  ?

**30** \*\*\* [CH, RAI, COM]

On donne la chaîne d'implications représentée ci-contre : carré  $\Rightarrow$  rectangle  $\Rightarrow$  parallélogramme  $\Rightarrow$  quadrilatère. Pour chacune des trois flèches, écrire une phrase. Puis choisir deux réciproques fausses et donner un contre-exemple géométrique pour chacune.



**31** \*\*\* [CH, RAI, COM]

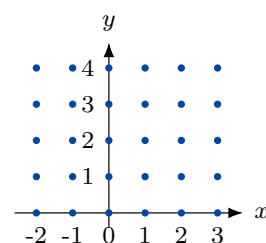
Un camarade affirme : « Pour montrer qu'une phrase avec *tous* est vraie, il suffit de vérifier trois exemples. » Répondre en mathématicien :

1. expliquer pourquoi cette méthode ne suffit pas ;
2. inventer une proposition qui est vraie pour 1, 2, 3, mais fausse pour 4 ;
3. formuler la règle correcte pour prouver ou réfuter une phrase avec « tous ».

**32** \*\*\* [CH, MOD, RAI]

Un code secret est un couple  $(x; y)$  avec  $x \in A$  et  $y \in B$ . On sait :

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}, \\ B = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$



Le code vérifie les deux conditions :  $x + y = 3$  et  $x < y$ . Lister tous les couples possibles.

**33** \*\*\* [CH, RAI, COM]

On veut montrer que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

1. Écrire les objets à introduire au début de la démonstration.
2. Rédiger une démonstration complète.
3. La réciproque suivante est-elle vraie ? « Si une somme

est multiple de 7, alors chacun des deux termes est multiple de 7. »

**34** \*\*\* [COM]

Bilan personnel. Rédiger une fiche méthode de six lignes

maximum qui explique :

- comment lire un diagramme d'ensembles ;
- comment réfuter une proposition générale ;
- comment ne pas confondre implication et réciproque.