

OBJECTIFS

- Définir une loi de probabilité sur un univers fini.
- Calculer des probabilités avec le complémentaire, une somme ou l'équiprobabilité.
- Comprendre et calculer une probabilité conditionnelle.
- Construire et lire un arbre pondéré.
- Observer la fluctuation d'échantillonnage par simulation.

ACTIVITE DE DEPART

Une population de 200 pièces contient 30 pièces défectueuses. On tire une pièce au hasard.

1. Quelle hypothèse fait-on lorsqu'on dit « au hasard » ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une pièce défectueuse ?
3. Si on répète 50 tirages simulés, obtient-on toujours exactement 15 pièces défectueuses ?

1. Loi de probabilité sur un univers fini

Définition (Univers et événement) Dans une expérience aléatoire, l'**univers** Ω est l'ensemble des issues possibles. Un **événement** est une partie de Ω .

Définition (Loi de probabilité) Une **loi de probabilité** associe à chaque issue un nombre compris entre 0 et 1, de sorte que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

Propriété (Probabilité d'un événement) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent. Dans le cas d'équiprobabilité,

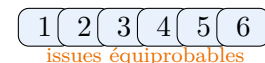
$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Propriété (Événement contraire) Si $\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A , alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Méthode Pour calculer une probabilité, choisir la stratégie la plus courte : compter les issues favorables en cas d'équiprobabilité, additionner les probabilités d'issues, ou passer par le contraire lorsque l'événement contraire est plus simple.

Exemple Pour une pièce équilibrée, $\Omega = \{P, F\}$ et $P(P) = P(F) = 0,5$. Pour un dé équilibré,

$$P(\text{nombre pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

**2. Probabilité conditionnelle**

⇒ TD N18 – Partie A : probabilité et événement contraire

Définition (Probabilité conditionnelle) Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant A est notée $P_A(B)$. Elle mesure la probabilité de B lorsqu'on se place dans la situation où A est réalisé.

Propriété (Formule) Lorsque $P(A) \neq 0$,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dans une situation d'équiprobabilité issue d'une population finie, cela revient à

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}.$$

Exemple Dans une classe, 12 élèves sont internes et 7 d'entre eux pratiquent un sport. Si I désigne « être interne » et S « pratiquer un sport », alors

$$P_I(S) = \frac{7}{12}.$$

Cette probabilité n'est pas $P_S(I)$.

	S	$\bar{S}$	Total
I	7	5	12
$\bar{I}$	13	10	23
Total	20	15	35

Méthode Pour lire $P_A(B)$, traduire oralement : « parmi les cas où A est réalisé, quelle proportion réalise aussi B ? »

Vigilance. En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$. Le dénominateur n'est pas le même.

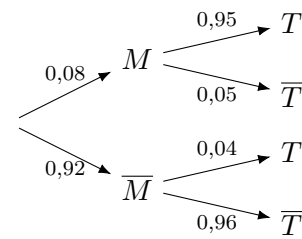
3. Arbres pondérés et situations de diagnostic

Définition (Arbre pondéré) Un **arbre pondéré** représente des choix ou événements successifs. Les nombres écrits sur les branches sont des probabilités, souvent conditionnelles à partir du deuxième niveau.

Propriété (Règle du chemin) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.

Méthode Pour utiliser un arbre, on lit d'abord la première branche, puis les branches suivantes comme des probabilités conditionnelles. On vérifie que les probabilités issues d'un même nœud ont pour somme 1.

Vigilance. Le programme de seconde n'attend pas le calcul systématique d'une probabilité à partir de probabilités conditionnelles sur une partition. L'arbre sert ici surtout à lire, interpréter et modéliser des probabilités conditionnelles.



Exemple Si M signifie « malade » et T « test positif », alors $P_M(T) = 0,95$, mais $P_T(M)$ est une autre probabilité.

⇒ TD N18 – Partie B : tableaux, arbres et conditionnement

4. Échantillonnage et simulation

Définition (Échantillon et fluctuation) Un **échantillon** est un ensemble d'observations obtenu en répétant une expérience ou en prélevant des individus. La fréquence observée peut varier d'un échantillon à l'autre : c'est la **fluctuation d'échantillonnage**.

Propriété (Loi des grands nombres, version seconde) Lorsque le nombre d'essais est grand, sauf exception, la fréquence observée d'un événement est proche de sa probabilité.

Méthode Une simulation ne démontre pas la probabilité exacte. Elle permet d'observer un comportement probable, de conjecturer et de contrôler l'ordre de grandeur d'un résultat.

5. Synthèse

A RETENIR

- Une loi de probabilité est un modèle : elle est choisie ou construite à partir d'hypothèses.
- En équiprobabilité, une probabilité se calcule par un quotient de cardinaux.
- $P_A(B)$ signifie : probabilité de B sachant A , donc on se place parmi les cas où A est réalisé.
- Dans un arbre, les branches après un premier événement portent des probabilités conditionnelles.
- Une fréquence observée fluctue ; pour un grand nombre d'essais, elle est souvent proche de la probabilité.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. On lance un dé équilibré. Calculer $P(\text{obtenir au moins } 5)$, puis son contraire.
2. Dans le tableau de la partie 2, calculer $P_S(I)$ et comparer avec $P_I(S)$.
3. Sur l'arbre de diagnostic, lire $P_{\overline{M}}(T)$ et l'interpréter.
4. Expliquer pourquoi deux simulations de 100 essais peuvent donner deux fréquences différentes.

```
from random import random
```

```
def frequence(n):  
    succes = 0  
    for k in range(n):  
        if random() < 0.3:  
            succes = succes + 1  
    return succes/n
```

