

OBJECTIFS

- Réinvestir Pythagore, Thalès, trigonométrie, vecteurs, droites et fonctions.
- Utiliser un projeté orthogonal pour transformer une figure en calcul.
- Choisir une méthode adaptée : géométrie, vectorielle, repérée ou fonctionnelle.
- Résoudre un problème d'optimisation géométrique.

ACTIVITE DE DEPART

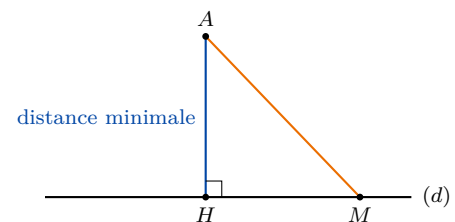
Un point M se déplace sur une droite (d) . On veut savoir à quel endroit il est le plus proche d'un point fixe A .

1. Sur une figure, placer un point H de (d) tel que $AH \perp (d)$.
2. Comparer AM et AH lorsque $M \neq H$.
3. Quelle notion permet de nommer le point H ?

1. Projeté orthogonal et distance à une droite

Définition (Projeté orthogonal) Soit A un point et (d) une droite. Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H de (d) tel que $AH \perp (d)$.

Propriété (Point le plus proche) Si H est le projeté orthogonal de A sur (d) , alors AH est la plus petite distance de A à un point de la droite (d) . Pour tout point M de (d) , on a $AM \geq AH$.



Exemple Si $AH = 3$ cm et $HM = 4$ cm, alors $AM^2 = AH^2 + HM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $AM = 5$ cm.

Méthode Lorsqu'une longueur semble minimale, chercher un angle droit ou construire un projeté orthogonal. On transforme alors le problème en triangle rectangle.

Vigilance. Le projeté orthogonal est un point. La distance d'un point à une droite est une longueur : AH .

⇒ TD N15 – Partie A : projetés, triangles rectangles et longueurs

2. Choisir une méthode de géométrie

Propriété (Méthodes disponibles) Un même problème de géométrie peut se résoudre par plusieurs voies :

- géométrie classique : Pythagore, Thalès, trigonométrie ;
- géométrie repérée : coordonnées, distances, milieux ;
- vecteurs : colinéarité, parallélisme, alignement ;
- fonctions : aire, longueur ou coût dépendant d'une variable.

Méthode Avant de calculer, repérer ce qui est demandé :

- prouver un alignement : vecteurs colinéaires ou équation de droite ;
- calculer une longueur : Pythagore, distance ou trigonométrie ;
- comparer des aires : expression littérale ou fonction ;
- optimiser : écrire une fonction puis étudier ses variations.

Indice dans l'énoncé	Méthode possible
Milieu, parallèles	vecteurs / Thalès
Angle droit	Pythagore / projection
Repère donné	coordonnées
Variable x	fonction
Maximum/minimum	variations

Exemple Dans un repère, si $A(1;2)$, $B(5;4)$ et $C(9;6)$, alors $\overrightarrow{AB}(4;2)$ et $\overrightarrow{AC}(8;4)$. Les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B, C sont alignés.

⇒ TD N15 – Partie B : choisir et justifier une méthode

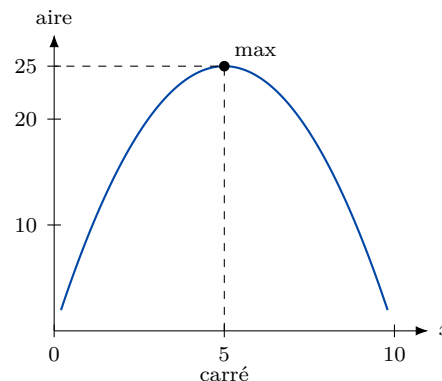
3. Optimisation géométrique

Définition (Optimiser) Optimiser une grandeur, c'est chercher la valeur maximale ou minimale qu'elle peut prendre, en respectant les contraintes du problème.

Méthode Pour résoudre un problème d'optimisation géométrique :

1. faire une figure et nommer la variable ;
2. déterminer l'intervalle des valeurs possibles ;
3. exprimer la grandeur à optimiser en fonction de la variable ;
4. utiliser un tableau de variations, une forme connue ou un graphique ;
5. conclure dans le contexte.

Exemple On veut construire un rectangle de périmètre 20 cm. Si l'une des dimensions est x , l'autre vaut $10 - x$. L'aire est donc $A(x) = x(10 - x)$, avec $0 < x < 10$. Le maximum est atteint pour $x = 5$: le rectangle optimal est un carré.



Vigilance. Une valeur qui donne un maximum sur le graphique doit rester compatible avec les contraintes géométriques.

⇒ TD N15 – Partie C : aires, longueurs et optimisation

4. Synthèse de stratégie

A RETENIR

- Le projeté orthogonal transforme souvent un problème de distance en triangle rectangle.
- En géométrie, choisir la méthode fait partie du raisonnement : figure, vecteurs, coordonnées ou fonction.
- Un problème d'optimisation exige une variable, un domaine et une conclusion contextualisée.
- Une figure bien codée évite beaucoup d'erreurs de calcul.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Tracer une droite (d) , un point $A \notin (d)$, puis le projeté orthogonal de A sur (d) .
2. Dans un triangle rectangle ABC en A , on donne $AB = 6$ et $AC = 8$. Calculer BC .
3. Dans un repère, proposer une méthode pour prouver que deux droites sont parallèles.
4. Un rectangle a pour périmètre 30. Si une dimension vaut x , exprimer son aire.