

OBJECTIFS

- Résoudre $f(x) = k$, $f(x) < k$ ou $f(x) = g(x)$ graphiquement ou algébriquement.
- Lire une intersection ou une position relative de courbes.
- Construire un tableau de signes pour un produit ou un quotient.
- Vérifier l'ensemble de définition avant de conclure.

ACTIVITE DE DEPART

Deux fonctions sont représentées par une parabole et une droite.

1. Que signifie graphiquement résoudre $f(x) = g(x)$?
2. Que signifie graphiquement résoudre $f(x) > g(x)$?
3. Pourquoi une lecture graphique peut-elle être insuffisante ?

1. Équations de fonctions : lire et calculer

Définition (Solution d'une équation $f(x) = g(x)$) Résoudre $f(x) = g(x)$, c'est chercher toutes les abscisses x pour lesquelles les deux fonctions ont la même image. Graphiquement, ce sont les abscisses des points d'intersection des courbes.

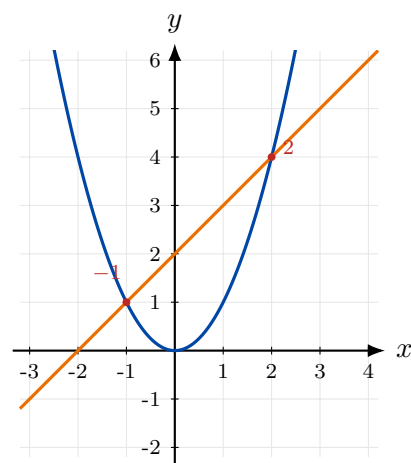
Méthode Pour résoudre $f(x) = g(x)$, on peut :

1. lire les intersections sur un graphique ;
2. transformer l'équation en $f(x) - g(x) = 0$;
3. factoriser si possible ;
4. conclure par l'ensemble $\mathcal{S}$.

Exemple Résoudre $x^2 = x + 2$. On obtient l'équation équivalente

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0.$$

Donc $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$.



Vigilance. Une solution lue graphiquement doit souvent être vérifiée par le calcul, surtout si l'intersection ne tombe pas sur une graduation.

⇒ TD N13 – Partie A : intersections et lectures graphiques

2. Inéquations de fonctions et tableaux de signes

Définition (Tableau de signes) Un tableau de signes indique sur quels intervalles une expression est positive, négative ou nulle. Il permet de résoudre des inéquations du type $A(x) > 0$, $A(x) \leq 0$.

Propriété (Produit nul et signe d'un produit) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. Le signe d'un produit se déduit du signe de chaque facteur.

$$(+)\times(+) = +, \quad (+)\times(-) = -, \quad (-)\times(-) = +.$$

Exemple Résoudre $(x-2)(x+3) > 0$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$
$x-2$		$-$	$-$	0
produit		$+$	$-$	$+$

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

Méthode Pour résoudre $(x-a)(x-b) > 0$:

1. repérer les zéros des facteurs ;
2. les placer dans l'ordre sur une ligne ;
3. compléter les signes ;
4. lire les intervalles qui conviennent.

3. Quotients : domaine avant signe

Propriété (Quotient) Un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ est défini seulement lorsque $B(x) \neq 0$. Les valeurs qui annulent le dénominateur sont exclues de l'ensemble de définition et ne peuvent jamais être solutions.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	$-$	0
$x+2$		$-$	0	$+$
quotient		$+$	$-$	$+$

Méthode Pour résoudre une inéquation avec quotient :

1. déterminer les valeurs interdites ;
2. étudier séparément le signe du numérateur et du dénominateur ;
3. construire le tableau de signes du quotient ;
4. lire l'ensemble des solutions en respectant les valeurs interdites.

Définition (Résoudre $f(x) < k$) Résoudre $f(x) < k$, c'est résoudre $f(x) - k < 0$. Cela ramène souvent à un tableau de signes.

Exemple Pour $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$, la valeur -2 est interdite. Le quotient est nul pour $x = 1$. Le tableau de signes donne $\mathcal{S} =]-2; 1]$.

A RETENIR

- $f(x) = g(x)$ se lit graphiquement comme une intersection de courbes.
- $f(x) > g(x)$ se traduit par $f(x) - g(x) > 0$, puis par un signe.
- Pour un quotient, on commence toujours par exclure les valeurs interdites.
- Toute résolution doit se terminer par un ensemble de solutions $\mathcal{S}$.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Résoudre $x^2 = 4$, puis $x^2 < 4$.
2. Résoudre $(x-5)(x+1) \geq 0$ à l'aide d'un tableau de signes.
3. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{x+4}{x-3}$.
4. Résoudre graphiquement, puis algébriquement si possible : $x^2 = x + 2$.