

OBJECTIFS

- Relier une courbe et un tableau de variations.
- Lire un maximum, un minimum et leurs lieux d'atteinte.
- Utiliser un tableau pour comparer des images.
- Modéliser un problème simple d'optimisation.

ACTIVITE DE DEPART

On observe la hauteur d'un ballon au cours du temps. La courbe monte jusqu'à $t = 3$, puis redescend.

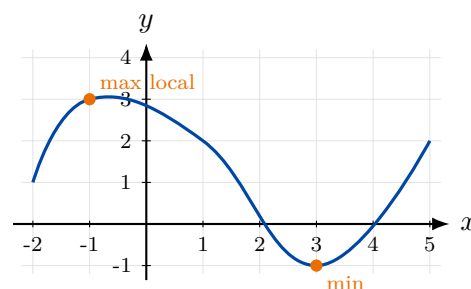
1. À quel instant la hauteur semble-t-elle maximale ?
2. Peut-on répondre à cette question sans connaître toutes les valeurs ?
3. Quel résumé permettrait de conserver seulement l'information « monte puis descend » ?

1. Lire les variations sur une courbe

Définition (Fonction croissante ou décroissante) Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est croissante sur I lorsque, pour tous $a, b \in I$, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur I lorsque, pour tous $a, b \in I$, si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Définition (Extremum) Un maximum est la plus grande valeur prise par une fonction sur un intervalle. Un minimum est la plus petite valeur prise par une fonction sur un intervalle.



Exemple Sur le graphique, la fonction augmente sur $[-2; -1]$, diminue sur $[-1; 3]$, puis augmente sur $[3; 5]$.

Méthode Pour décrire les variations à partir d'une courbe, on lit de gauche à droite : la courbe monte, descend ou reste constante. On précise toujours l'intervalle concerné.

⇒ TD N12 – Partie A : passer d'une courbe à un tableau

2. Construire et exploiter un tableau de variations

Définition (Tableau de variations) Un tableau de variations résume les intervalles où une fonction augmente ou diminue, ainsi que les valeurs importantes aux bornes et aux extremums.

Propriété (Utilisation) Si f est croissante sur $[a; b]$, alors les valeurs de $f(x)$ vont de $f(a)$ vers $f(b)$. Si f est décroissante, elles vont de $f(a)$ vers $f(b)$ en diminuant.

Méthode Pour utiliser un tableau de variations :

1. repérer l'intervalle où se trouve x ;
2. lire le sens de variation ;
3. comparer les images ou identifier l'extremum ;
4. conclure avec une phrase.

Exemple Si f est décroissante sur $[1; 4]$, alors $1 < 3 < 4$ donne $f(1) \geq f(3) \geq f(4)$.

x	-2	-1	3	5
$f(x)$	1	↗ 3 ↘	-1	↗ 2

Propriété (Extremums dans un tableau) Dans un tableau de variations, un maximum se lit en haut d'une flèche montante puis descendante. Un minimum se lit en bas d'une flèche descendante puis montante.

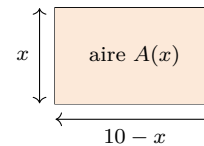
Vigilance. Un tableau de variations ne donne pas toujours toutes les solutions d'une équation : il indique les zones où les chercher et permet parfois d'en connaître le nombre.

3. Optimiser et approcher un extremum

Méthode Pour résoudre un problème d'optimisation :

1. choisir la variable et son intervalle possible ;
2. exprimer la grandeur à optimiser avec une fonction ;
3. étudier ou lire les variations ;
4. répondre dans le contexte.

Exemple Un rectangle a pour périmètre 20. Si sa largeur est x , sa longueur vaut $10 - x$, avec $0 < x < 10$. Son aire est $A(x) = x(10 - x)$. Une lecture graphique ou un tableau de valeurs suggère que l'aire est maximale pour $x = 5$, c'est-à-dire pour un carré.



Propriété (Rôle des outils numériques) La calculatrice, un tableur ou Python permettent d'explorer une fonction : tableau de valeurs, courbe, estimation d'un maximum ou d'un minimum. Ils ne remplacent pas la justification mathématique.

```
def aire(x):  
    return x*(10-x)  
  
meilleur_x = 0  
meilleure_aire = 0  
for k in range(1,100):  
    x = k/10  
    if aire(x) > meilleure_aire:  
        meilleur_x = x  
        meilleure_aire = aire(x)  
print(meilleur_x, meilleure_aire)
```

A RETENIR

- Les variations décrivent le comportement d'une fonction sur des intervalles.
- Un tableau de variations est un résumé : il sert à comparer, encadrer, optimiser.
- Un maximum ou un minimum se donne avec sa valeur et l'endroit où il est atteint.
- Dans un problème, la conclusion doit revenir au contexte.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Pour $f(x) = x^2$, compléter le tableau de variations sur $[-3; 4]$.
2. Une fonction est croissante sur $[-2; 1]$. Comparer $f(-1)$ et $f(1)$.
3. À partir du tableau ci-dessus, donner le minimum de f sur $[-2; 5]$.
4. Un rectangle a pour périmètre 16. Écrire l'aire en fonction de sa largeur x .