

OBJECTIFS

- Reconnaître les courbes de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto |x|$.
- Relier courbe, signe, variations et équations du type $f(x) = k$ ou $f(x) < k$.
- Comparer des images graphiquement ou algébriquement.
- Connaître deux démonstrations de référence : variations de x^2 et de $\frac{1}{x}$.

ACTIVITE DE DEPART

On trace les points obtenus à partir du tableau suivant.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$ x $	2	1	0	1	2
x^3	-8	-1	0	1	8

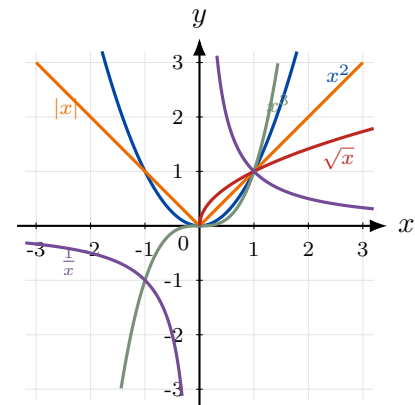
1. Quelles courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ?
2. Quelles courbes passent par l'origine ?
3. Quelle courbe monte toujours lorsque x augmente ?

1. Construire un répertoire de courbes

Définition (Fonction de référence) Une fonction de référence est une fonction dont la courbe, les variations et les valeurs particulières servent de modèle pour reconnaître et résoudre rapidement des situations proches.

Propriété (Les cinq fonctions à connaître)

nom	fonction	ensemble de définition
carré	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$
inverse	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
racine carrée	$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$
cube	$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$
valeur absolue	$x \mapsto x $	$\mathbb{R}$



Exemple La courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ ne peut pas avoir de points d'abscisse négative : $\sqrt{x}$ n'est défini que pour $x \geq 0$.

Méthode Pour identifier une fonction de référence, on observe d'abord l'ensemble de définition, puis la forme de la courbe, les symétries éventuelles, le signe et les variations.

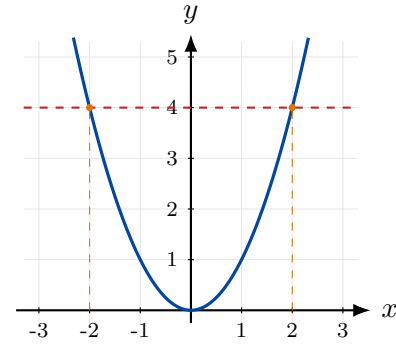
Vigilance. Une courbe ne suffit pas toujours : il faut toujours vérifier l'ensemble de définition. Par exemple, $\frac{1}{x}$ n'est pas défini en 0.

⇒ TD N11 – Partie A : reconnaître les courbes et les domaines

2. Signe, variations et équations simples

Propriété (Synthèse des variations et du signe)

$f(x)$	signe	variations
x^2	≥ 0	$\searrow$ sur $] -\infty, 0]$ puis $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$
$ x $	≥ 0	$\searrow$ sur $] -\infty, 0]$ puis $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	signe de x	$\searrow$ sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	≥ 0	$\nearrow$ sur $[0, +\infty[$
x^3	signe de x	$\nearrow$ sur $\mathbb{R}$



Méthode Pour résoudre $f(x) = k$ ou $f(x) < k$, on peut :

1. tracer ou reconnaître la courbe de f ;
2. placer la droite horizontale $y = k$;
3. lire les abscisses des points d'intersection, puis les intervalles demandés.

On vérifie ensuite par le calcul lorsque c'est possible.

Exemple Résoudre $x^2 = 9$. La droite $y = 9$ coupe la parabole aux abscisses -3 et 3 . Donc $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$.

Propriété (Équations de référence)

Pour $k \in \mathbb{R}$:

- $x^2 = k$ a deux solutions si $k > 0$, une si $k = 0$, aucune si $k < 0$.
- $|x| = k$ a le même comportement.
- $\sqrt{x} = k$ a une solution $x = k^2$ si $k \geq 0$, aucune si $k < 0$.

3. Comparer des images et démontrer des variations

Théorème (Position relative de $y = x$ et $y = x^2$ pour $x \geq 0$) Pour $x \geq 0$, comparer x^2 et x revient à étudier $x^2 - x = x(x - 1)$. Ainsi :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x \quad \text{et} \quad x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x.$$

Les deux courbes se coupent en 0 et 1.

Méthode Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, on choisit la méthode la plus adaptée : calcul direct, utilisation des variations, ou lecture graphique.

Exemple Comparer $(-3)^2$ et 2^2 . On calcule : $(-3)^2 = 9$ et $2^2 = 4$, donc $(-3)^2 > 2^2$. Ici les variations seules ne suffisent pas car -3 et 2 sont de part et d'autre de 0.

Théorème (Variations de x^2) Soient $a, b \in [0, +\infty[$ tels que $a < b$. Alors $b^2 - a^2 = (b - a)(a + b) > 0$, donc $a^2 < b^2$. La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Par symétrie, elle est décroissante sur $] -\infty, 0]$.

Théorème (Variations de $\frac{1}{x}$) Soient a, b deux réels non nuls d'un même intervalle $] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$, avec $a < b$. Alors

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}.$$

Comme $ab > 0$ et $b - a > 0$, on a $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. La fonction inverse est donc décroissante sur chacun des deux intervalles.

A RETENIR

- Le domaine de définition fait partie de l'identité d'une fonction.
- Les fonctions carré et valeur absolue ont un minimum égal à 0, atteint en 0.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0 ; elle est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.
- Les courbes de référence servent à résoudre rapidement des équations et inéquations simples.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{1}{x}$, puis résoudre $\frac{1}{x} = 2$.
2. Résoudre $x^2 < 4$, puis représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.
3. Comparer sans calculatrice $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$, puis $(-4)^2$ et 3^2 .
4. Expliquer pourquoi l'équation $\sqrt{x} = -2$ n'a pas de solution.