

OBJECTIFS

- Relier fonction affine, droite et coefficient directeur.
- Interpréter m comme pente et taux d'accroissement.
- Étudier les variations et le signe d'une fonction affine.
- Résoudre $f(x) = k$ et $f(x) < k$ graphiquement ou algébriquement.

ACTIVITE DE DEPART

La droite d a pour équation $y = 2x - 1$.

1. Calculer les ordonnées des points de d d'abscisses 0, 1 et 3.
2. Entre $x = 1$ et $x = 3$, de combien l'ordonnée augmente-t-elle ?
3. Quel vecteur directeur évident peut-on associer à cette droite ?

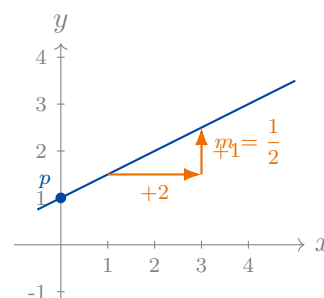
1. Fonction affine et droite

Définition (Fonction affine) Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels. Le nombre m est le coefficient directeur et le nombre p est l'ordonnée à l'origine.

Propriété (Lien avec les droites) La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = mx + p$ est la droite d'équation $y = mx + p$. Elle admet $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Méthode Pour tracer rapidement la droite d'équation $y = mx + p$, on place le point $(0; p)$, puis on utilise la pente m . Par exemple si $m = \frac{2}{3}$, avancer de 3 unités en abscisse fait monter de 2 unités en ordonnée.

Exemple Pour $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, la droite coupe l'axe des ordonnées en 1. Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, ou plus simplement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Vigilance. Le point $(0; p)$ est sur la droite, mais p n'est pas un coefficient multiplicateur. Le nombre m mesure l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente de 1.

⇒ TD N10 – Partie A : reconnaître et tracer une fonction affine

2. Taux d'accroissement constant

Définition (Taux d'accroissement) Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, le taux d'accroissement entre deux réels distincts a et b est

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Propriété (Coefficient directeur) Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, le taux d'accroissement est toujours égal à m :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m \quad \text{pour tous } a \neq b.$$

Ainsi $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$

Méthode Si on connaît deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'une droite non verticale, alors la pente est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Ensuite, on peut utiliser la forme $y = m(x - x_A) + y_A$, puis développer si nécessaire.

Exemple La droite passant par $A(2; 1)$ et $B(6; 9)$ a pour pente $m = \frac{9 - 1}{6 - 2} = 2$. Elle a donc pour équation $y = 2(x - 2) + 1$, soit $y = 2x - 3$.

⇒ TD N10 – Partie B : déterminer une fonction affine à partir de données

3. Variations d'une fonction affine

Théorème (Variations des fonctions affines)

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Méthode Pour justifier le sens de variation d'une fonction affine, il suffit d'identifier le signe de son coefficient directeur m .

Exemple La fonction $f(x) = -2x + 6$ est affine avec $m = -2 < 0$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété (Démonstration) Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Alors $x_2 - x_1 > 0$. Pour $f(x) = mx + p$,

$$f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1).$$

Le signe de cette différence est donc le signe de m . C'est ce qui détermine le sens de variation.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Si $m > 0$, la fonction est croissante.

Vigilance. Une droite qui « monte » de gauche à droite correspond à $m > 0$. Une droite qui « descend » correspond à $m < 0$.

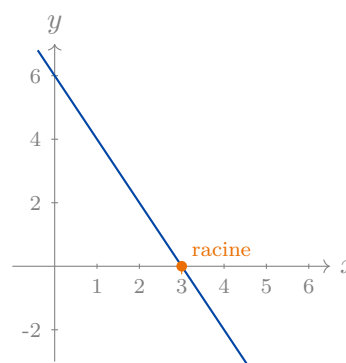
4. Signe et équations avec une fonction affine

Propriété (Signe de $mx + p$) Si $m \neq 0$, l'expression $mx + p$ s'annule pour $x = -\frac{p}{m}$. Le signe de $mx + p$ se lit ensuite avec le sens de variation de la fonction affine ou sur sa droite représentative.

Méthode Pour résoudre $f(x) = k$, on résout $mx + p = k$. Pour résoudre $f(x) < k$, on résout $mx + p < k$ en faisant attention au signe lorsque l'on divise par un nombre négatif.

Exemple Pour $f(x) = -2x + 6$, résoudre $f(x) > 0$ revient à résoudre $-2x + 6 > 0$. On obtient $-2x > -6$, donc $x < 3$. Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty; 3[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+	0	-



⇒ TD N10 – Partie C : variations, signes et inéquations

5. Synthèse

A RETENIR

- Une fonction affine s'écrit $f(x) = mx + p$ et sa courbe est une droite.
- Le coefficient directeur m est une pente : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Si $m > 0$, la fonction est croissante ; si $m < 0$, elle est décroissante ; si $m = 0$, elle est constante.
- Le signe de $mx + p$ s'étudie autour de sa racine $-\frac{p}{m}$, lorsque $m \neq 0$.

Méthode Choisir la méthode adaptée.

- Pour tracer : utiliser p , puis la pente m .
- Pour trouver l'expression : utiliser deux points ou un point et une pente.
- Pour étudier signe et variation : identifier le coefficient directeur et la racine.

A L'ORAL

Expliquer la phrase : « une fonction affine est la même droite, lue avec le vocabulaire des fonctions ». Utiliser les mots : image, pente, vecteur directeur, coefficient directeur.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Donner m et p pour $f(x) = 4x - 7$, puis préciser le sens de variation.
2. Tracer rapidement la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
3. Déterminer la fonction affine dont la droite passe par $A(1; 5)$ et $B(4; -1)$.
4. Résoudre $3x - 6 = 0$, puis étudier le signe de $3x - 6$.
5. Résoudre graphiquement puis algébriquement $-2x + 6 < 2$.

ERREURS CLASSIQUES

- confondre le signe de m et le signe de $f(x)$;
- oublier de changer le sens d'une inégalité en divisant par un nombre négatif;
- lire p comme une pente au lieu d'une ordonnée à l'origine.

CONTROLE RAPIDE

Pour une fonction affine, trois informations se répondent : le signe de m , l'allure de la droite, le sens de variation. Si ces trois lectures ne sont pas cohérentes, il faut reprendre le calcul.