

**OBJECTIFS**

- Décrire une droite par un point et une direction.
- Construire une équation cartésienne avec le déterminant.
- Passer d'une équation cartésienne à une équation réduite, et réciproquement.
- Utiliser les équations pour étudier alignement, parallélisme et intersection.

**ACTIVITE DE DEPART**

On donne  $A(1; 2)$  et  $B(5; 4)$ . On veut reconnaître tous les points  $M(x; y)$  placés sur la droite  $(AB)$ , sans tracer la figure.

1. Calculer les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et de  $\overrightarrow{AM}$ .
2. Écrire la condition de colinéarité à l'aide du déterminant.
3. Développer l'égalité obtenue : elle devient une équation vérifiée par les coordonnées de tous les points de la droite.

## 1. Une droite est déterminée par un point et une direction

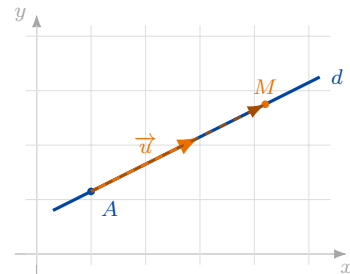
**Définition (Vecteur directeur d'une droite)**

Soit  $d$  une droite. Un vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $d$  lorsqu'il est non nul et que sa direction est celle de la droite  $d$ .

**Propriété (Point et direction)** Une droite est entièrement déterminée par la donnée d'un point  $A$  de cette droite et d'un vecteur directeur  $\vec{u}$  non nul.

**Méthode** Pour montrer qu'un point  $M$  appartient à la droite passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ , on traduit l'idée suivante :  $\overrightarrow{AM}$  doit avoir la même direction que  $\vec{u}$ . Autrement dit, les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires, ce qui se teste par un déterminant nul.

**Vigilance.** Un vecteur directeur n'est pas unique : les vecteurs  $(2; 1)$ ,  $(4; 2)$  et  $(-2; -1)$  peuvent diriger la même droite. En revanche, le vecteur nul ne peut jamais être un vecteur directeur.



**Exemple** Si  $A(1; 2)$  et  $\vec{u}(2; 1)$ , la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  contient par exemple le point obtenu en ajoutant ce vecteur :  $B(3; 3)$ .

⇒ TD N08 – Partie A : reconnaître une direction, lire et tracer une droite.

## 2. Construire une équation cartésienne avec le déterminant

**Théorème (Forme générale d'une équation de droite)** Dans un repère orthonormé, toute droite admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ . Réciproquement, toute équation  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ , représente une droite.

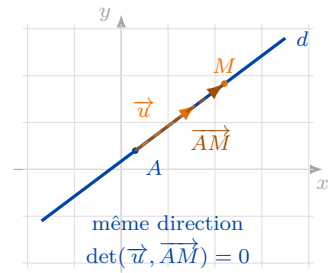
**Démonstration.** Soit  $d$  la droite passant par  $A(x_A; y_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha; \beta)$ , avec  $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$ . Pour tout point  $M(x; y)$ ,  $M$  appartient à  $d$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires. Or  $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ , donc cette condition s'écrit :

$$\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \iff \alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A) = 0.$$

En développant, on obtient l'équation équivalente :

$$-\beta x + \alpha y + \beta x_A - \alpha y_A = 0.$$

C'est une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , avec  $a = -\beta$ ,  $b = \alpha$  et  $c = \beta x_A - \alpha y_A$ .



**Exemple** La droite d'équation  $2x - 3y + 6 = 0$  admet le vecteur  $(3; 2)$  comme vecteur directeur, car  $(-b; a) = (3; 2)$ .

**Propriété (Vecteur directeur associé)** Une droite d'équation  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ , admet le vecteur  $(-b; a)$  comme vecteur directeur.

**Méthode** Pour déterminer une équation de la droite passant par  $A(x_A; y_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha; \beta)$ , on écrit  $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ , puis on développe. Cette méthode garde le lien avec la géométrie : une équation de droite vient d'une condition de colinéarité.

**Exemple** On cherche une équation de la droite passant par  $A(2; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3; 2)$ . Soit  $M(x; y)$ . On obtient :

$$\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \iff 3(y + 1) - 2(x - 2) = 0 \iff -2x + 3y + 7 = 0.$$

Une équation de la droite est donc  $-2x + 3y + 7 = 0$ .

**Méthode** Pour déterminer une équation de la droite passant par deux points distincts  $A$  et  $B$ , on utilise comme vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ , puis on applique la méthode précédente.

**Exemple** Avec  $A(-1; 2)$  et  $B(3; -2)$ , on a  $\overrightarrow{AB}(4; -4)$ . On peut utiliser le vecteur directeur plus simple  $(1; -1)$ . Soit  $M(x; y)$ . Alors :

$$\det((1; -1), \overrightarrow{AM}) = 0 \iff 1(y - 2) - (-1)(x + 1) = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

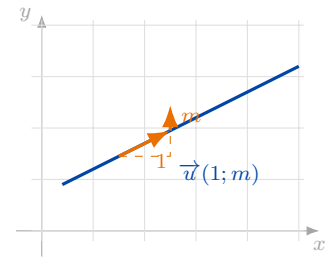
Une équation de  $(AB)$  est donc  $x + y - 1 = 0$ .

**Vigilance.** Dans une équation cartésienne, les coefficients peuvent être multipliés par un même nombre non nul :  $x + y - 1 = 0$  et  $2x + 2y - 2 = 0$  représentent la même droite.

⇒ TD N08 – Partie B : construire une équation cartésienne par le déterminant.

### 3. Equation réduite et pente

**Définition (Equation réduite)** Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme  $y = mx + p$ . Le nombre  $m$  est la pente, ou coefficient directeur, et  $p$  est l'ordonnée à l'origine. Une droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $x = k$ .



**Propriété (Passage de la forme cartésienne à la forme réduite)** Pour une droite d'équation  $ax + by + c = 0$ , si  $b \neq 0$ , alors on peut isoler  $y$  et obtenir

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Sa pente est donc  $m = -\frac{a}{b}$ . Si  $b = 0$ , l'équation est de la forme  $x = k$  : la droite est verticale.

**Propriété (Pente et vecteur directeur)** Une droite d'équation réduite  $y = mx + p$  admet  $(1; m)$  comme vecteur directeur. Plus généralement, tout vecteur colinéaire à  $(1; m)$  dirige cette droite.

**Exemple** Pour  $y = 2x - 3$ , une augmentation de 1 en abscisse produit une augmentation de 2 en ordonnée. La pente est 2 et  $(1; 2)$  est un vecteur directeur.

**Méthode** Pour passer de  $ax + by + c = 0$  à une équation réduite, on repère d'abord si  $b$  est nul. Si  $b \neq 0$ , on isole  $y$ . Si  $b = 0$ , on isole  $x$  : la droite est verticale et n'a pas de pente.

**Exemple** La droite  $2x - 3y + 6 = 0$  n'est pas verticale car  $b = -3 \neq 0$ . On isole  $y$  :

$$2x - 3y + 6 = 0 \iff -3y = -2x - 6 \iff y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Sa pente est  $\frac{2}{3}$ . Une équation réduite est  $y = \frac{2}{3}x + 2$ .

**Méthode** Pour déterminer la pente d'une droite passant par deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , on vérifie d'abord si  $x_A = x_B$ . Si  $x_A \neq x_B$ , alors  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ . Si  $x_A = x_B$ , la droite est verticale et n'a pas de pente.

**Vigilance.** La pente n'existe que pour une droite non verticale. Une droite d'équation  $x = k$  possède des vecteurs directeurs verticaux, par exemple  $(0; 1)$ , mais elle n'a pas d'équation réduite de la forme  $y = mx + p$ .

⇒ TD N08 – Partie B : passer d'une forme d'équation à l'autre.

## 4. Utiliser les équations de droites

**Propriété (Alignement)** Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, c'est-à-dire si  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ .

**Propriété (Parallélisme)** Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Pour deux droites d'équations  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$ , on peut comparer les vecteurs  $(-b; a)$  et  $(-b'; a')$ .

**Méthode** Pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes données par leurs équations réduites, on égalise les deux expressions de  $y$ , on résout l'équation obtenue, puis on remplace  $x$  dans l'une des deux équations.

| Question                              | Outil efficace                        |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Trois points sont-ils alignés ?       | Déterminant de deux vecteurs.         |
| Deux droites sont-elles parallèles ?  | Vecteurs directeurs colinéaires.      |
| Deux droites sécantes se coupent où ? | Résolution d'un système.              |
| Tracer rapidement une droite ?        | Deux points, ou un point et la pente. |

**Exemple** Les droites  $d : y = 2x - 1$  et  $d' : y = -x + 5$  sont sécantes. Leur point d'intersection vérifie :

$$2x - 1 = -x + 5 \iff 3x = 6 \iff x = 2.$$

Puis  $y = 2 \times 2 - 1 = 3$ . Le point d'intersection est  $I(2; 3)$ .

**Exemple** Soient  $A(1; 1)$ ,  $B(4; 3)$  et  $C(10; 7)$ . On a  $\overrightarrow{AB}(3; 2)$  et  $\overrightarrow{AC}(9; 6)$ . Alors

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times 6 - 2 \times 9 = 0.$$

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont donc alignés.

**Vigilance.** Pour deux droites parallèles, il faut distinguer deux situations : elles peuvent être strictement parallèles ou confondues. Une vérification avec un point permet de lever l'ambiguïté.

⇒ TD N08 – Partie C : choisir l'outil adapté ; partie D : problèmes de synthèse.

## 5. Synthèse

### A RETENIR

- Une droite est déterminée par un point et un vecteur directeur non nul.
- Pour construire une équation, on traduit une colinéarité :  $M$  appartient à la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  si et seulement si  $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ .
- Une équation cartésienne s'écrit  $ax + by + c = 0$ , avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ . Le vecteur  $(-b; a)$  est un vecteur directeur.
- Si  $b \neq 0$ , alors  $ax + by + c = 0$  peut s'écrire  $y = mx + p$ , avec  $m = -\frac{a}{b}$ . Si  $b = 0$ , la droite est verticale.
- Le déterminant sert à tester l'alignement et le parallélisme ; les équations servent à trouver une intersection.

### APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner un vecteur directeur de la droite  $3x - 5y + 1 = 0$ .
2. Passer  $4x + 2y - 6 = 0$  sous forme réduite.
3. Déterminer une équation de la droite passant par  $A(1; -2)$  et de vecteur directeur  $(2; 3)$ .
4. Dire si  $A(0; 1)$ ,  $B(2; 5)$  et  $C(3; 7)$  sont alignés.
5. Déterminer si  $d : 2x - y + 4 = 0$  et  $d' : 4x - 2y - 1 = 0$  sont parallèles.
6. Trouver le point d'intersection de  $y = -2x + 3$  et  $y = x - 6$ .

⇒ TD N08 : équations, changements de forme et tests géométriques.