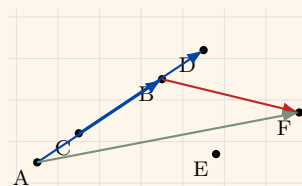


OBJECTIFS

- Décrire un déplacement par un vecteur : direction, sens, norme.
- Additionner des vecteurs et utiliser la relation de Chasles.
- Utiliser les coordonnées d'un vecteur, d'un milieu et une norme.
- Tester la colinéarité avec un coefficient ou un déterminant.
- Transformer une question géométrique en calcul : alignement, parallélisme, milieu.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Sur le quadrillage, un même déplacement peut être placé à plusieurs endroits.



1. Comparer les déplacements $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Quel déplacement obtient-on en enchaînant $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BF}$?
3. Comment prouver par le calcul que deux flèches sont parallèles ?

1. Vecteur, égalité et somme

Définition (Vecteur) Un vecteur représente un déplacement. Il est défini par sa **direction**, son **sens** et sa **norme**. La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, correspond à sa longueur.

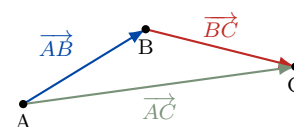
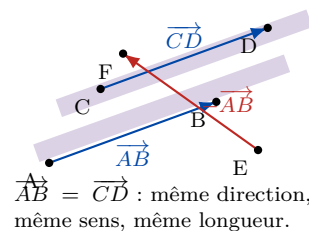
Définition (Égalité de deux vecteurs) Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme. Ainsi, dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que le déplacement de A vers B est le même que celui de C vers D .

Propriété (Opposé et vecteur nul) Pour tous points A et B , on a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. De plus, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, où $\vec{0}$ est le vecteur nul.

Propriété (Somme et relation de Chasles) Pour tous points A , B et C ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Cette égalité s'appelle la **relation de Chasles**. Additionner deux vecteurs revient à mettre les flèches bout à bout.



Méthode Pour simplifier une somme de vecteurs, on cherche des lettres qui s'enchaînent : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ devient $\overrightarrow{AC}$. On peut aussi déplacer un représentant d'un vecteur pour mettre les flèches bout à bout.

Exemple On simplifie :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

On a aussi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Remarque. Pour tous points A , B et I , $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ si et seulement si I est le milieu de $[AB]$. C'est une égalité vectorielle très utile pour prouver qu'un point est un milieu.

⇒ TD N07 – Partie A : reconnaître, compléter et construire des égalités vectorielles.

2. Multiplication par un réel et colinéarité

Définition (Produit d'un vecteur par un réel)

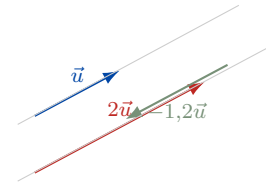
Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$. Il a le même sens si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$, et sa norme vaut $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Définition (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Autrement dit, ils ont la même direction.

Propriété (Alignement et parallélisme)

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Même direction : les vecteurs sont colinéaires. Le signe du coefficient donne le sens.

Exemple Si $\vec{v} = -3\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de sens contraires, et $\|\vec{v}\| = 3\|\vec{u}\|$.

Méthode Pour prouver un alignement, on ne cherche pas d'abord une figure parfaite : on essaie de montrer que deux vecteurs construits avec les trois points sont colinéaires. Pour prouver un parallélisme, on compare deux vecteurs directeurs des deux droites.

Vigilance. On ne compare les sens de deux vecteurs que lorsqu'ils ont déjà la même direction. Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

3. Coordonnées, norme et milieu

Définition (Coordonnées d'un vecteur) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On note alors

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le nombre x est le déplacement horizontal et y le déplacement vertical.

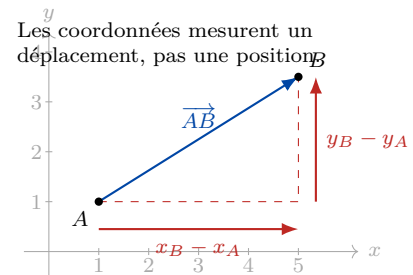
Propriété (Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$) Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Propriété (Norme et milieu) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$



Exemple Soient $A(-2; 3)$ et $B(4; -1)$. Alors

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De plus $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Méthode Pour calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on fait toujours **arrivée moins départ** : abscisse de B moins abscisse de A , puis ordonnée de B moins ordonnée de A .

Vigilance. Les coordonnées d'un point s'écrivent en ligne $M(x; y)$, celles d'un vecteur s'écrivent souvent en colonne $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On ne confond pas $A(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

⇒ TD N07 – Partie B : coordonnées de vecteurs, normes et milieux.

4. Déterminant et critère de colinéarité

Définition (Déterminant de deux vecteurs)

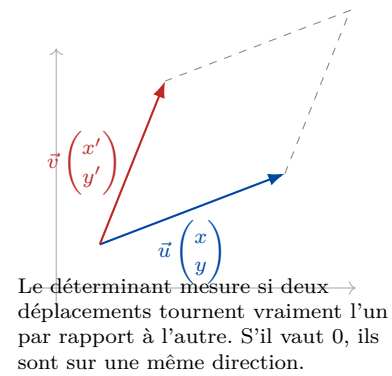
Dans une base orthonormée, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'.$$

Théorème (Critère de colinéarité)

Deux vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff xy' - yx' = 0.$$



Exemple Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 6 \times 2 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode Pour tester un alignement de A , B et C , on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis leur déterminant. S'il est nul, les trois points sont alignés ; sinon ils ne le sont pas.

Propriété (Démonstration du critère) Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(ky) - y(kx) = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$ et si $x \neq 0$, alors $y' = \frac{x'}{x}y$, donc $\vec{v} = \frac{x'}{x}\vec{u}$. Si $x = 0$, comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $y \neq 0$, puis $-yx' = 0$, donc $x' = 0$ et $\vec{v} = \frac{y'}{y}\vec{u}$. Dans tous les cas, les vecteurs sont colinéaires.

Méthode Pour prouver que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. Si ce déterminant vaut 0, les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.

Vigilance. Le déterminant se calcule en **croix** : $xy' - yx'$. Changer l'ordre des vecteurs change le signe, mais pas le fait que le résultat soit nul ou non.

⇒ TD N07 – Partie C : démontrer un alignement ou un parallélisme avec le déterminant.

5. Synthèse

A RETENIR

- Un vecteur code un déplacement ; deux vecteurs égaux ont même direction, même sens et même norme.
- Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Milieu : I milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Coordonnées : si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Norme : si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Milieu : $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.
- Colinéarité : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
2. Soient $A(1; -2)$ et $B(5; 4)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis AB .
3. Soient $A(-1; 2)$ et $B(3; 6)$. Calculer les coordonnées du milieu de $[AB]$.
4. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
5. Les points $A(0; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(6; 9)$ sont-ils alignés ?
6. Trouver un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

⇒ TD N07 – Partie D : problèmes de géométrie repérée et synthèse.

MÉTHODES À SAVOIR REFAIRE EN AUTONOMIE

1. **Construire** un représentant d'un vecteur à partir d'une flèche déjà donnée.
2. **Simplifier** une somme grâce à Chasles, par exemple $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
3. **Calculer** $\overrightarrow{AB}$, une longueur AB et le milieu de $[AB]$ à partir de coordonnées.
4. **Tester** la colinéarité avec un coefficient ou avec un déterminant.
5. **Traduire** : alignement $\longleftrightarrow$ colinéarité de deux vecteurs issus d'un même point.
6. **Traduire** : parallélisme $\longleftrightarrow$ colinéarité de deux vecteurs directeurs.

Pour le mini-test. Savoir faire un calcul court sans figure parfaite : l'outil principal est souvent le choix des bons vecteurs.