

OBJECTIFS

- Résoudre une équation du premier degré par équivalences.
- Résoudre une inéquation du premier degré et donner l'ensemble des solutions.
- Utiliser l'équation produit nul et traiter une équation quotient.
- Modéliser une contrainte par une équation ou une inéquation.

ACTIVITE DE DEPART

Une salle loue du matériel selon deux tarifs : $A = 12 + 3x$ euros et $B = 5x$ euros, où x est le nombre d'heures.

1. Pour quelle durée les deux tarifs sont-ils égaux ?
2. À partir de quand le tarif A devient-il plus avantageux ?
3. Quelle différence y a-t-il entre résoudre une équation et résoudre une inéquation ?

1. Résoudre une équation du premier degré

Définition (Équation et solution) Une équation d'inconnue x est une égalité contenant x . Une solution est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie. Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes ses solutions.

Propriété (Transformations équivalentes) On obtient une équation équivalente lorsqu'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul. La résolution conserve alors exactement les mêmes solutions.

Méthode Pour résoudre une équation du premier degré, on développe si nécessaire, on regroupe les termes contenant x d'un côté, les nombres de l'autre, puis on divise par le coefficient de x . On écrit les étapes avec $\Leftrightarrow$.

Vigilance. Tester une solution permet de vérifier, mais ne suffit pas à résoudre : il faut montrer qu'il n'y a pas d'autre solution.

$$\boxed{2x + 5} \quad \boxed{17}$$

faire la même chose des deux côtés

Exemple On résout dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3(2x - 1) &= 4x + 7 \\ \Leftrightarrow 6x - 3 &= 4x + 7 \\ \Leftrightarrow 2x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{5\}$.

$\Rightarrow$ TD N05 – Partie A : tester une solution et résoudre des équations simples.

2. Résoudre une inéquation et représenter les solutions

Définition (Inéquation) Une inéquation d'inconnue x est une comparaison contenant x , par exemple $2x - 3 < 7$. Résoudre une inéquation, c'est déterminer tous les x qui rendent la comparaison vraie.

Propriété (Opérations sur les inégalités) Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres conserve le sens de l'inégalité. Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve le sens ; par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité change.

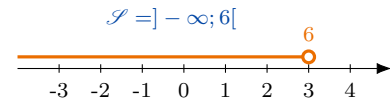
Exemple On résout dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2(3x - 1) &< 5x + 4 \\ \iff 6x - 2 &< 5x + 4 \\ \iff x &< 6. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} =] - \infty; 6[$.

Vigilance. L'erreur la plus fréquente est d'oublier de changer le sens lorsqu'on divise par un nombre négatif.

⇒ TD N05 – Partie B : inéquations, intervalles et droites graduées.



Méthode À la fin d'une inéquation, on donne l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle et on peut le représenter sur une droite graduée pour contrôler le sens.

Exemple Si $-3x \leq 12$, alors en divisant par $-3 < 0$, on change le sens : $x \geq -4$. Ainsi $\mathcal{S} = [-4; +\infty[$.

3. Équation produit nul et équation quotient

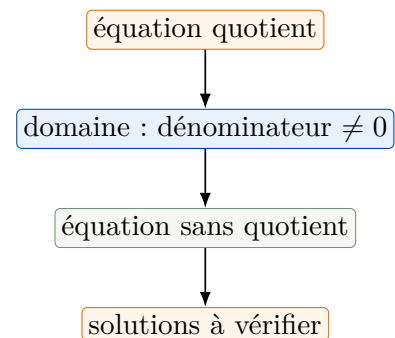
Propriété (Produit nul) Pour tous réels A et B , $AB = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$. Cette propriété permet de résoudre une équation factorisée.

Exemple

$$\begin{aligned} (2x - 3)(x + 5) = 0 &\iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -5. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -5; \frac{3}{2} \right\}$.

Définition (Valeur interdite) Une expression quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ est définie seulement lorsque $B(x) \neq 0$. Les valeurs qui annulent le dénominateur sont des valeurs interdites.



Méthode Pour résoudre une équation quotient, on commence par exclure les valeurs interdites. Ensuite seulement, on transforme l'équation en conservant l'équivalence sur le domaine étudié.

Exemple On résout $\frac{3x + 1}{x - 2} = 4$. On doit avoir $x \neq 2$. Pour $x \neq 2$,

$$\frac{3x + 1}{x - 2} = 4 \iff 3x + 1 = 4(x - 2) \iff x = 9.$$

Comme $9 \neq 2$, $\mathcal{S} = \{9\}$.

Vigilance. On ne multiplie jamais par une expression qui pourrait valoir 0 sans avoir traité le domaine de définition.

4. Modéliser et conclure

Méthode Pour modéliser un problème, on choisit l'inconnue avec son unité, on traduit la contrainte par une équation ou une inéquation, on résout, puis on revient au contexte. Une réponse numérique sans phrase finale est incomplète.

Exemple Dans l'activité, les deux tarifs sont égaux lorsque $12 + 3x = 5x$, soit $12 = 2x$, donc $x = 6$. Pour $x > 6$, on a $12 + 3x < 5x$: le tarif A est alors plus avantageux.

A RETENIR

- Une résolution d'équation se rédige par équivalences et se termine par $\mathcal{S} = \dots$.
- Pour une inéquation, multiplier ou diviser par un nombre négatif change le sens.
- Une équation produit nul se résout facteur par facteur.
- Une équation quotient exige de commencer par les valeurs interdites.
- Dans un problème, il faut interpréter l'ensemble des solutions dans le contexte.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Résoudre $5x - 7 = 2x + 11$.
2. Résoudre $4 - 3x \geq 10$ et donner $\mathcal{S}$ sous forme d'intervalle.
3. Résoudre $(x - 8)(3x + 2) = 0$.
4. Résoudre $\frac{x + 5}{x - 1} = 2$, en précisant la valeur interdite.
5. Traduire : « le triple d'un nombre augmenté de 7 est inférieur à 25 ».
6. Dans un problème, expliquer pourquoi la solution $x = -2$ peut être mathématiquement trouvée mais non acceptable.

CHECKLIST DE RÉDACTION

- Ai-je écrit l'ensemble de travail, souvent $x \in \mathbb{R}$?
- Ai-je utilisé $\iff$ pour conserver les solutions ?
- Ai-je changé le sens de l'inégalité si nécessaire ?
- Ai-je traité les valeurs interdites d'un quotient ?
- Ai-je donné $\mathcal{S}$ sous la forme attendue ?
- Ai-je rédigé une phrase finale pour un problème ?

$\Rightarrow$ TD N05 – Parties C et D : choisir une stratégie, modéliser et rédiger.