

OBJECTIFS

- Calculer avec des puissances entières relatives, des fractions et des racines carrées.
- Développer, factoriser et réduire en utilisant les identités remarquables.
- Choisir la forme adaptée d'une expression selon la question.
- Isoler une variable dans une formule et comparer deux quantités.

ACTIVITE DE DEPART

On considère le programme : choisir un nombre x , ajouter 3, puis élever au carré. Un élève écrit $(x+3)^2 = x^2 + 9$.

1. Tester avec $x = 10$. Les deux résultats sont-ils égaux ?
2. Que représente géométriquement le carré de côté $x+3$?
3. Quelle écriture permet de calculer rapidement ? Quelle écriture permet de résoudre $(x+3)^2 = 25$?

1. Puissances et racines carrées

Définition (Puissance entière) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$. Si $a \neq 0$, alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$.

Propriété (Règles de calcul) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ non nuls si nécessaire, et pour $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

Définition (Racine carrée) Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré vaut a . Ainsi $(\sqrt{a})^2 = a$.

$$\sqrt{a^2}$$

$$|a|$$

$$\geq 0$$

la racine carrée est toujours positive

Propriété (Racines) Pour $a, b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$. De plus, si $x < 0$, alors $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

Méthode Avant de simplifier une racine, on cherche un facteur carré : $50 = 25 \times 2$, $108 = 36 \times 3$, $180 = 36 \times 5$.

Vigilance. On n'écrit pas $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{9+16} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

⇒ TD N04 – Partie A : automatismes sur puissances, racines et fractions.

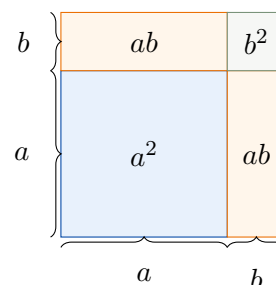
2. Développer, factoriser, réduire

Définition (Formes d'une expression) Une même expression peut avoir plusieurs écritures. Une forme est **développée** lorsqu'elle est écrite comme une somme, **factorisée** lorsqu'elle est écrite comme un produit, et **réduite** lorsque les termes semblables ont été regroupés.

Propriété (Distributivité) Pour tous réels a, b, c , $a(b+c) = ab+ac$. Dans l'autre sens, $ab+ac = a(b+c)$. Développer transforme un produit en somme ; factoriser transforme une somme en produit.

Propriété (Identités remarquables) Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$



$$\text{Exemple } (2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25.$$

$$9x^2 - 49 = (3x)^2 - 7^2 = (3x-7)(3x+7).$$

Méthode Pour choisir entre développer et factoriser, on regarde l'objectif. Pour calculer ou comparer une somme de termes, la forme développée est souvent utile. Pour résoudre une équation produit ou repérer des facteurs, la forme factorisée est souvent préférable.

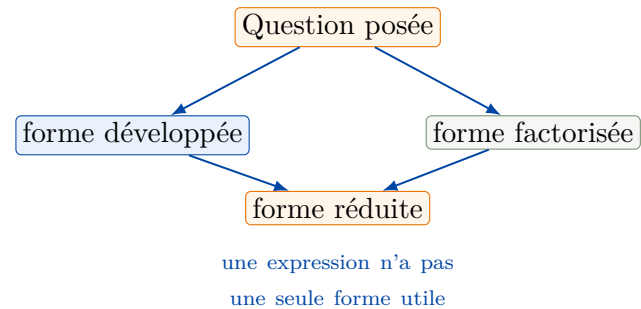
Vigilance. $(a + b)^2$ n'est pas égal à $a^2 + b^2$. Le terme $2ab$ correspond aux deux rectangles du schéma.

⇒ TD N04 – Partie B : développer, factoriser, reconnaître une identité remarquable.

3. Choisir une forme, isoler une variable, comparer

Méthode Choisir la bonne forme.

Calculer remplacer la variable puis simplifier.
Résoudre chercher une forme factorisée ou isoler l'inconnue.
Comparer étudier une différence ou un quotient positif.
Interpréter revenir à la phrase ou à la grandeur mesurée.



Exemple Pour comparer $A = (x + 4)^2$ et $B = x^2 + 8x + 7$, on calcule $A - B = x^2 + 8x + 16 - (x^2 + 8x + 7) = 9$. Donc A est toujours supérieur à B de 9.

Méthode **Isoler une variable.** On effectue les mêmes transformations sur les deux membres de l'égalité, en visant la variable demandée. Dans $U = RI$, si $I \neq 0$, alors $R = \frac{U}{I}$.

Dans $S = \pi r^2$, si $r \geq 0$, alors $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Définition (Comparer) Comparer deux nombres A et B , c'est déterminer lequel est le plus grand, ou s'ils sont égaux. On peut étudier $A - B$. Si A et B sont positifs, on peut aussi étudier le quotient $\frac{A}{B}$.

Exemple Si $P_1 = 1,2P_0$, alors P_1 est 1,2 fois P_0 : cela correspond à une augmentation de 20 %.

Vigilance. Une expression seule n'est pas une équation. On ne « résout » pas $3x + 7$; on peut la développer, la réduire, la factoriser ou l'évaluer.

4. Synthèse

A RETENIR

- Les règles de puissances permettent de regrouper les facteurs ; les racines demandent de surveiller le signe : $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Développer et factoriser sont deux sens d'une même transformation. Les identités remarquables doivent être reconnues dans les deux sens.
- La forme utile dépend de la question : calculer, résoudre, comparer, interpréter ou isoler une variable.
- Comparer deux quantités revient souvent à étudier une différence, ou un rapport lorsque les quantités sont positives.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Simplifier $2^5 \times 2^{-3}$, puis $\frac{3^4}{3^6}$.
2. Écrire $\sqrt{98}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}$ et b le plus petit possible.
3. Développer et réduire $(3x - 2)^2$.
4. Factoriser $25x^2 - 16$.
5. Dans $V = \pi r^2 h$, exprimer h en fonction de V , r et π , avec $r \neq 0$.
6. Comparer $x^2 + 6x + 10$ et $(x + 3)^2$.

⇒ TD N04 – Parties C et D : choisir une forme, modéliser et rédiger.