

OBJECTIFS

- Reconnaître et utiliser multiples, diviseurs, nombres pairs et impairs.
- Relier divisibilité et reste d'une division euclidienne.
- Simplifier une fraction jusqu'à une forme irréductible.
- Rédiger de courtes démonstrations en arithmétique.

ACTIVITE DE DEPART

On dispose de 2753 bonbons. Peut-on les ranger sans reste dans des sachets de 2, de 5, de 9 ou de 11 bonbons ?

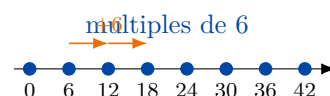
1. Que signifie ici « sans reste » ?
2. Peut-on répondre rapidement pour 2 et 5 ?
3. Pourquoi écrire $2753 = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 3$ peut-il aider pour 9 ou 11 ?

1. Multiples, diviseurs et division euclidienne

Définition (Multiple et diviseur) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, avec $b \neq 0$. On dit que a est un **multiple** de b , ou que b est un **diviseur** de a , lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. On note alors $b \mid a$.

Propriété (Reste nul) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Dans la division euclidienne de a par b , on écrit $a = bq + r$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$. Alors $b \mid a$ si et seulement si $r = 0$.

Définition (Pair et impair) Un entier est **pair** s'il est multiple de 2. Il s'écrit $2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Un entier est **impair** s'il s'écrit $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.



Exemple $42 = 6 \times 7$, donc 42 est un multiple de 6, et 6 est un diviseur de 42. En revanche, $44 = 6 \times 7 + 2$: le reste n'est pas nul, donc $6 \nmid 44$.

Méthode Pour tester si b divise a , on peut chercher si $a = b \times k$ avec k entier, ou poser mentalement la division euclidienne et regarder le reste.

Vigilance. La phrase « 6 divise 42 » ne signifie pas « $6 \div 42$ ». Elle signifie que 42 est dans la table de 6.

⇒ TD N03 – Partie A : tables, restes, pairs et impairs

2. Critères de divisibilité : comprendre les restes

Les critères de divisibilité ne sont pas seulement des règles à apprendre : ils viennent des restes laissés par les unités, les dizaines, les centaines, etc.

Propriété (Critères utiles)

- Par 2** le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Par 5** le chiffre des unités est 0 ou 5.
- Par 10** le chiffre des unités est 0.
- Par 3** la somme des chiffres est un multiple de 3.
- Par 9** la somme des chiffres est un multiple de 9.
- Par 11** la somme alternée des chiffres est un multiple de 11.

Exemple Pour 2753, on observe :

$$2753 = 2 \times 1000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 3.$$

Pour une division par 9, les nombres 1, 10, 100, 1000 laissent tous le même reste que 1. Ainsi 2753 a le même reste que $2 + 7 + 5 + 3 = 17$. Or $17 = 9 \times 1 + 8$, donc 2753 n'est pas divisible par 9.

Pour 11, les restes des colonnes sont alternativement 1, -1, 1, -1. On calcule $3 - 5 + 7 - 2 = 3$. Ce n'est pas un multiple de 11, donc 2753 n'est pas divisible par 11.

Méthode Pour utiliser un critère, on calcule un nombre plus petit qui laisse le même reste. Pour 3 et 9, on remplace le nombre par la somme de ses chiffres ; pour 11, on alterne les signes.

Vigilance. Un nombre divisible par 9 est toujours divisible par 3, mais la réciproque est fautive : 123 est divisible par 3, pas par 9.

⇒ TD N03 – Partie B : critères de divisibilité et chiffres manquants

3. Fractions irréductibles

Définition (Fraction irréductible) Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, avec $b \neq 0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b n'ont aucun diviseur commun strictement supérieur à 1.

Définition (Nombre premier) Un entier naturel $p \geq 2$ est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p .

Méthode Pour rendre une fraction irréductible, on peut simplifier par un diviseur commun, puis recommencer jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus. Une méthode sûre consiste à décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.

Exemple

$$\frac{84}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2}{3}.$$

On a simplifié par $2 \times 3 \times 7 = 42$. La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible.

Vigilance. Simplifier une fraction, ce n'est pas supprimer les mêmes chiffres. Par exemple, $\frac{16}{64} \neq \frac{1}{4}$ parce qu'on a barré le 6, mais parce que 16 divise 16 et 64.

⇒ TD N03 – Partie C : fractions irréductibles et décompositions

4. Démontrer en arithmétique

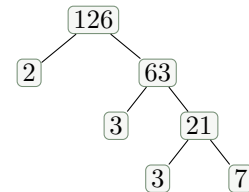
Théorème (Somme de deux multiples) Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si m et n sont deux multiples de d , alors $m + n$ est aussi un multiple de d .

Exemple Démontrons le résultat. Comme m et n sont des multiples de d , il existe deux entiers k et ℓ tels que $m = dk$ et $n = d\ell$. Alors

$$m + n = dk + d\ell = d(k + \ell).$$

Or $k + \ell$ est un entier. Donc $m + n$ est un multiple de d .

Méthode Pour démontrer une propriété sur les entiers, on introduit une écriture générale : un multiple de d s'écrit dk , un entier pair s'écrit $2k$, un entier impair s'écrit $2k + 1$. On calcule ensuite avec ces écritures, puis on conclut avec une phrase.



$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7.$$

Méthode Pour additionner ou soustraire des fractions, on choisit un dénominateur commun, puis on réduit le résultat si possible.

Théorème (Carré d'un nombre impair) Le carré d'un nombre impair est impair.

Exemple Soit n un nombre impair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est impair.

Propriété (Deux algorithmes simples)

- Pour savoir si a est multiple de b , on calcule le reste de la division de a par b . Si le reste vaut 0, alors a est multiple de b .
- Le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b est $a \times q$, où q est le quotient dans la division euclidienne de b par a .

A RETENIR

- $b \mid a$ signifie : il existe un entier k tel que $a = bk$.
- Dans une division euclidienne, être divisible signifie avoir un reste nul.
- Les critères de divisibilité permettent de remplacer un grand nombre par un calcul de reste plus petit.
- Une fraction irréductible n'a plus de diviseur commun strictement supérieur à 1 entre son numérateur et son dénominateur.
- Pour démontrer, on introduit les écritures dk , $2k$ ou $2k + 1$, puis on conclut clairement.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Dire si 684 est divisible par 2, par 3, par 5, par 9 et par 11.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de 2753 par 9, puis par 11.
3. Rendre irréductible la fraction $\frac{198}{270}$.
4. Déterminer tous les nombres de la forme $?35?4$ divisibles par 3 et par 11.
5. Démontrer que la somme de deux nombres pairs est paire.