

OBJECTIFS

- Situer les nombres sur une droite graduée.
- Distinguer entiers, décimaux, rationnels et réels.
- Lire, écrire et représenter des intervalles.
- Interpréter $|a|$ et $|a - b|$ comme des distances.
- Donner un encadrement décimal d'un nombre réel.

ACTIVITE DE DEPART

Sur une droite graduée, on place $A(-3)$, $B(2)$, $C(\sqrt{2})$ et $D(\pi)$.

1. Les abscisses sont-elles toutes décimales ? rationnelles ?
2. Comment écrire « les nombres compris entre -1 et 3 » ?
3. Quelle est la distance entre A et B ? entre 0 et -3 ?

1. Nombres réels et droite graduée

Définition (Ensembles de nombres) On utilise les ensembles suivants :

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$: entiers naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$: entiers relatifs ;
- $\mathbb{D}$: nombres décimaux ;
- $\mathbb{Q}$: nombres rationnels, c'est-à-dire les quotients $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$;
- $\mathbb{R}$: nombres réels, représentés par les points d'une droite graduée.

Propriété (Inclusions) On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Certains réels ne sont pas rationnels : par exemple $\sqrt{2}$ et π .

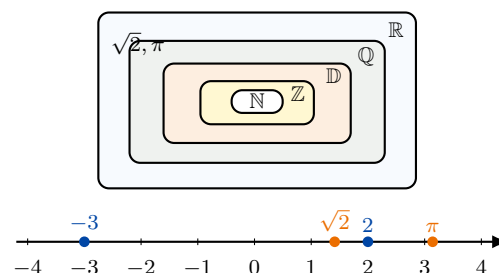
Méthode Pour classer un nombre, on cherche l'ensemble le plus précis auquel il appartient. Par exemple, $5 \in \mathbb{N}$, donc il appartient aussi à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Vigilance. Un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles. La calculatrice donne souvent une valeur approchée : elle ne transforme pas π ou $\sqrt{2}$ en nombres décimaux.

⇒ TD N02 – Partie A : classer des nombres et lire une droite graduée

2. Intervalles : inégalités et représentations

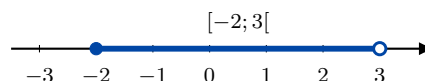
Définition (Intervalle) Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels vérifiant une ou plusieurs inégalités. Par exemple, $[a; b]$ désigne les réels x tels que $a \leq x \leq b$.



Notation	Signification	Représentation
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	extrémités incluses
$[a; b[$	$a \leq x < b$	a inclus, b exclu
$]a; b]$	$a < x \leq b$	a exclu, b inclus
$]a; b[$	$a < x < b$	extrémités exclues
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	vers la droite
$] - \infty; b]$	$x \leq b$	vers la gauche

Méthode Pour passer d'une inégalité à un intervalle :

- on repère les bornes ;
- on choisit crochet fermé si la borne est incluse ;
- on choisit crochet ouvert si la borne est exclue ;
- vers l'infini, le crochet est toujours ouvert.



Vigilance. On écrit $[2; +\infty[$, jamais $[2; +\infty]$, car $+\infty$ n'est pas un nombre.

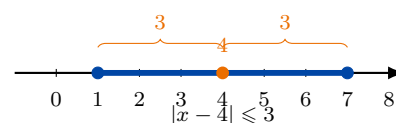
Exemple L'inégalité $-2 \leq x < 3$ s'écrit $x \in [-2; 3[$.

Définition (Réunion et intersection d'intervalles) L'intersection $I \cap J$ contient les nombres appartenant à la fois à I et à J . La réunion $I \cup J$ contient les nombres appartenant à I ou à J .

⇒ TD N02 – Partie B : représenter, lire et comparer des intervalles

3. Valeur absolue et encadrements

Définition (Valeur absolue et distance) Pour un réel a , $|a|$ est la distance entre a et 0 sur la droite graduée. Pour deux réels a et b , la distance entre a et b est $|a - b|$.



Propriété (Distance à un centre) Si $r \geq 0$, alors $|x - a| \leq r$ signifie que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r . Ainsi :

$$|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r].$$

Définition (Encadrement décimal) Donner un encadrement à 10^{-n} près, c'est encadrer un réel par deux décimaux dont la différence vaut 10^{-n} .

Exemple Résoudre $|x - 4| \leq 3$, c'est chercher les nombres situés à une distance au plus 3 de 4. On obtient $x \in [1; 7]$.

Exemple $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ au centième près.

Méthode Pour écrire un intervalle sous la forme $|x - c| \leq r$, on calcule son centre c et son rayon r . Pour $[6; 20]$, le centre est 13 et le rayon est 7, donc $x \in [6; 20] \iff |x - 13| \leq 7$.

Vigilance. $|x - 4| \leq 3$ ne signifie pas $x - 4 \leq 3$ seulement : il faut penser à la distance, donc aux deux côtés du centre.

A RETENIR

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.
- Un intervalle traduit une inégalité et se représente sur une droite.
- $|a|$ est une distance à 0, et $|a - b|$ est une distance entre deux nombres.
- $|x - a| \leq r$ se lit : « x est à une distance au plus r de a ».

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Classer les nombres $7, -4, \frac{3}{5}, 0,12, \sqrt{5}$ dans les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
2. Écrire sous forme d'intervalle : $x > -1, 2 \leq x \leq 5, x < 3$.
3. Calculer $|-8|, |3 - 11|, |2 - \pi|$.
4. Résoudre sous forme d'intervalle : $|x - 5| \leq 2$.