

OBJECTIFS

- Nommer précisément les objets : nombres, ensembles, propositions.
- Lire et écrire les symboles d'appartenance, d'inclusion, de réunion et d'intersection.
- Distinguer une affirmation vraie, une affirmation fausse et une proposition à démontrer.
- Utiliser un contre-exemple, une implication, une réciproque et une équivalence.

ACTIVITE DE DEPART

On considère les nombres $-2, 0, \frac{1}{2}, 3, 4, 5, \sqrt{2}$.

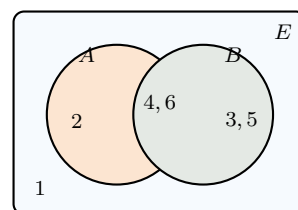
1. Lesquels sont des entiers ? des nombres positifs ? des rationnels ?
2. Peut-on appartenir à plusieurs ensembles à la fois ?
3. La phrase « tous les nombres positifs sont entiers » est-elle vraie ? Comment le prouver ou la réfuter ?

1. Ensembles : appartenir, inclure, réunir

Définition (Ensemble et élément) Un **ensemble** est une collection d'objets. Ces objets sont appelés ses **éléments**. On note $x \in A$ lorsque x appartient à l'ensemble A , et $x \notin A$ lorsqu'il n'y appartient pas.

Définition (Inclusion) Dire que A est un **sous-ensemble** de B , noté $A \subset B$, signifie que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B .

Définition (Réunion, intersection et complémentaire) La **réunion** $A \cup B$ contient les éléments qui sont dans A ou dans B . L'**intersection** $A \cap B$ contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B . Dans un ensemble de référence E , le **complémentaire** de A est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A , noté $E \setminus A$ ou $\bar{A}$.



Méthode Pour lire un diagramme :

- dans $A \cap B$: partie commune ;
- dans $A \cup B$: au moins une des deux zones ;
- dans $E \setminus A$: tout sauf A .

Vigilance. Le mot « ou » en mathématiques est inclusif : « dans A ou dans B » signifie « dans au moins l'un des deux ».

Exemple Si $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3; 4; 5; 6\}$, alors $A \cap B = \{4; 6\}$, $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ et $E \setminus A = \{1; 3; 5\}$.

Définition (Cardinal et produit cartésien) Si A est un ensemble fini, $\text{Card}(A)$ désigne le nombre de ses éléments. Si A et B sont deux ensembles, le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a; b)$, avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exemple Si $A = \{\text{rouge}; \text{bleu}\}$ et $B = \{S; M; L\}$, alors $\text{Card}(A) = 2$, $\text{Card}(B) = 3$ et $A \times B$ contient 6 couples : $(\text{rouge}; S)$, $(\text{rouge}; M)$, etc.

⇒ TD N01 – Partie A : trier, classer et lire des ensembles

2. Propositions, négations et contre-exemples

Définition (Proposition mathématique) Une **proposition mathématique** est une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : vraie ou fausse. Elle peut dépendre d'une variable.

Définition (Négation) La **négation** d'une proposition est une proposition qui est vraie exactement quand la proposition de départ est fausse.

Méthode Pour réfuter une proposition du type « tous les ... », un seul **contre-exemple** suffit. Pour démontrer qu'elle est vraie, il faut un argument général.

Exemple La proposition « tous les nombres positifs sont entiers » est fausse. Un contre-exemple est 0,5 : il est positif, mais il n'est pas entier.

Proposition	Négation
$x \in A$	$x \notin A$
$x < 3$	$x \geq 3$
$A \subset B$	Il existe un élément de A qui n'est pas dans B .
« P et Q »	« non P ou non Q »

Vigilance. Dire « tous ne sont pas » et dire « aucun n'est » ne signifient pas la même chose. La négation de « tous les élèves ont compris » est « au moins un élève n'a pas compris ».

⇒ TD N01 – Partie B : propositions, négations et contre-exemples

3. Implication, équivalence et raisonnements

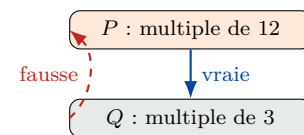
Définition (Implication et réciproque) Une phrase du type « si P , alors Q » est une **implication**. Sa **réciproque** est « si Q , alors P ». Une implication peut être vraie alors que sa réciproque est fausse.

Définition (Équivalence) Dire que P et Q sont **équivalentes** signifie que P implique Q et que Q implique P . On peut alors écrire $P \iff Q$.

Méthode Pour rédiger un raisonnement :

1. on introduit les objets manipulés ;
2. on annonce ce que l'on veut montrer ;
3. on utilise une propriété ou une définition ;
4. on conclut clairement.

Exemple Si un nombre entier est multiple de 12, alors il est multiple de 3. En effet, si $n = 12k$ avec k entier, alors $n = 3(4k)$, donc n est multiple de 3. La réciproque est fausse : 6 est multiple de 3, mais pas de 12.



Vigilance. On ne confond pas une implication et une équivalence. Le symbole $\iff$ n'est utilisé que si les deux sens sont vrais.

A RETENIR

- $x \in A$ parle d'un élément ; $A \subset B$ parle de deux ensembles.
- $A \cap B$ signifie « et » ; $A \cup B$ signifie « ou ».
- Un contre-exemple suffit pour montrer qu'une proposition générale est fausse.
- Une réciproque n'est pas automatiquement vraie.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. On donne $A = \{1; 2; 4; 8\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $\text{Card}(A)$.
2. Dire si la proposition est vraie ou fausse : « si un entier est divisible par 6, alors il est pair ». Écrire sa réciproque.
3. Donner la négation de : « $x \in [2; 5]$ » et de « tous les entiers pairs sont multiples de 4 ».