

TD N24 — Variables aléatoires, espérance

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Associer une variable aléatoire à une expérience, déterminer sa loi de probabilité, utiliser les notations $\{X = a\}$, $\mathbb{P}(X = a)$, $\mathbb{P}(X \leq a)$, calculer et interpréter l'espérance, la variance, l'écart-type, puis exploiter une simulation.

Méthode repère. Une variable aléatoire réelle associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire. Sa loi de probabilité se résume souvent par un tableau :

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline \mathbb{P}(X = x_i) & p_1 & \cdots & p_n \end{array} \quad \text{avec} \quad p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

Indicateurs.

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i, \quad \mathbb{V}(X) = \sum p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

On peut aussi utiliser König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Vigilance. L'espérance n'est pas forcément une valeur prise par X . Elle s'interprète comme une moyenne à long terme.

A — Réactivation : issues, événements et lois

① ★ [REP] On lance un dé équilibré à six faces. On définit la variable aléatoire X qui associe à chaque résultat le nombre obtenu.

- Quelles valeurs peut prendre X ?
- Compléter la loi de probabilité de X .

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$						

② ★ [REP] On lance une pièce équilibrée trois fois. On note X le nombre de piles obtenus.

PPP	PPF	PFP	FPP
PFF	FPF	FFP	FFF

Compléter :

$$X(PPP) = \dots, \quad X(PFF) = \dots, \quad X(FFF) = \dots$$

③ ★ [REP, CAL] Avec la variable X de l'exercice précédent, compléter la loi de probabilité.

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$				

④ ★ [COM] Traduire par une phrase les événements suivants.

$$\{X = 2\}, \quad \{X \leq 1\}, \quad \{X \geq 2\}, \quad \{X \neq 0\}.$$

⑤ ★ [CAL] On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y .

y_i	-2	0	3	5
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Calculer :

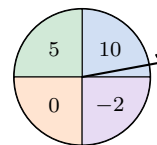
$$\mathbb{P}(Y = 3), \quad \mathbb{P}(Y \leq 0), \quad \mathbb{P}(Y > 0), \quad \mathbb{P}(Y \neq 5).$$

⑥ ★ [CAL] Une variable aléatoire Z prend les valeurs $-1, 2, 4$. Sa loi est donnée partiellement.

z_i	-1	2	4
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	0,25	0,45	

Compléter la loi de probabilité.

⑦ ★ [REP] Une roue comporte quatre secteurs.



La roue est équilibrée. On note G le gain indiqué par le secteur obtenu. Donner la loi de G .

⑧ ★ [RAI] Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

- La somme des probabilités d'une loi est égale à 1.
- L'espérance est toujours une valeur prise par la variable aléatoire.
- $\mathbb{P}(X \leq 2)$ peut se calculer en additionnant plusieurs probabilités.

B — Applications directes : espérance, variance et écart-type

⑨ ★ [CAL] Calculer l'espérance de X .

x_i	-4	2	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

⑩ ★ [CAL] Calculer l'espérance de Y .

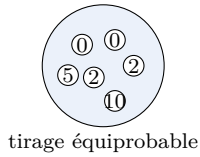
y_i	-2	0	4	10
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

⑪ ★★ [CAL, COM] Un jeu donne le gain algébrique X , en euros, suivant.

Gain x_i	-3	0	2	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,5	0,25	0,2	0,05

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Interpréter le résultat.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

12 ** [CAL, REP] On tire une boule dans l'urne suivante. Le nombre inscrit donne le gain.



1. Donner la loi de la variable G donnant le gain.
2. Calculer $\mathbb{E}(G)$.

13 ** [CAL] Calculer la variance et l'écart-type de X .

x_i	0	2	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

On pourra utiliser la définition :

$$\mathbb{V}(X) = \sum p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2.$$

14 ** [CAL] Calculer $\mathbb{E}(Y)$, puis $\mathbb{V}(Y)$ avec la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2.$$

y_i	-1	3	5
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,4	0,4	0,2

15 ** [CAL, REP] Compléter le tableau de calcul pour la variable X .

x_i	-2	1	4
p_i	0,2	0,5	0,3
$x_i p_i$			
$x_i^2 p_i$			

En déduire $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

16 ** [REP, RAI] Deux variables aléatoires ont la même espérance 3. Leurs lois sont :

x_i	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

y_i	-3	3	9
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,25	0,5	0,25

Sans calcul détaillé, laquelle semble la plus dispersée ? Vérifier en calculant les variances.

17 ** [CAL] On sait que $\mathbb{E}(X) = 4$. On définit :

$$Y = 3X - 2.$$

Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

18 ** [CAL] On sait que $\mathbb{V}(X) = 9$. On définit :

$$Z = 2X + 5.$$

Calculer $\mathbb{V}(Z)$ et $\sigma(Z)$.

19 ** [REP, CAL] Une variable aléatoire X représente le gain d'un jeu. On modifie le jeu : tous les gains sont doublés, puis on retire 1 euro. La nouvelle variable est

$$Y = 2X - 1.$$

1. Si $\mathbb{E}(X) = 0,5$, calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2. Si $\mathbb{V}(X) = 4$, calculer $\mathbb{V}(Y)$.
3. Interpréter l'effet de cette transformation sur le gain moyen.

20 ** [CAL, REP] On donne la loi de X .

x_i	-5	0	4	20
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Dire si le gain moyen est positif.

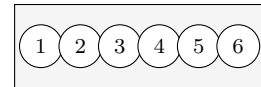
C — Approfondissement : modéliser et comparer

21 ** [MOD, REP] Un jeu consiste à lancer deux pièces équilibrées. Le joueur gagne 3 euros par pile obtenu, puis paie une mise de 4 euros. On note X le gain algébrique.

$$\begin{matrix} \text{PP} & \text{PF} & \text{FP} & \text{FF} \\ \text{gain : } 3 \times \text{nombre de piles} - 4 \end{matrix}$$

1. Déterminer les valeurs prises par X .
2. Donner la loi de X .
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Le jeu est-il équitable ?

22 ** [MOD, REP] On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 10 euros. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne 2 euros. Sinon, on perd 3 euros. On note G le gain.



Déterminer la loi de G , puis calculer son espérance.

23 ** [RAI, COM] Un élève affirme : « Si l'espérance d'un jeu est positive, alors on gagne à chaque partie. »

1. Expliquer pourquoi cette phrase est fausse.
2. Donner un exemple simple de jeu à espérance positive où l'on peut perdre.
3. Rédiger une phrase correcte avec l'expression « à long terme ».

24 ** [CAL, RAI] On considère deux jeux.

x_i	-2	1	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,5	0,4	0,1

y_i	-5	2	20
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,2	0,75	0,05

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
2. Calculer les variances.
3. Quel jeu semble le plus risqué ? Justifier.

25 *** [CH, RAI] Une variable aléatoire X prend les valeurs -2, 1, 6. On sait que :

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,3, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 6) = q.$$

1. Écrire une équation vérifiée par p et q .
2. On veut que $\mathbb{E}(X) = 2$. Écrire une deuxième équation.
3. Déterminer p et q .

26 *** [CH, RAI] Un organisateur propose un jeu : on mise m euros. On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, le joueur reçoit 12 euros ; si le résultat est 4 ou 5, il reçoit 3 euros ; sinon il ne reçoit rien.

- Exprimer le gain algébrique en fonction de m .
- Déterminer la loi de la variable G_m .
- Déterminer la valeur de m pour que le jeu soit équitable.

27 ** [REP, CAL] On donne une simulation de 20 valeurs d'une variable aléatoire X .

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valeur	0	2	0	5	2	0	2	5	0	2

rang	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
valeur	2	0	5	2	0	0	2	2	5	0

- Calculer la moyenne de cette simulation.
- Cette moyenne est-elle nécessairement égale à $\mathbb{E}(X)$?
- Pourquoi devient-elle utile lorsque le nombre de simulations augmente ?

28 *** [CH, REP] Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2, 5 avec les probabilités :

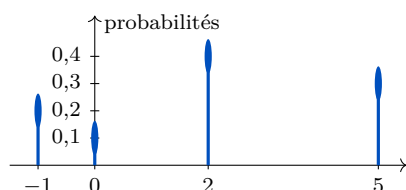
$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,4, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0,4, \quad \mathbb{P}(X = 5) = 0,2.$$

On veut simuler X à l'aide d'un nombre aléatoire r entre 0 et 1.

Tirer un nombre aléatoire r entre 0 et 1.
 Si $0 \leq r < 0,4$, afficher
 Si $0,4 \leq r < 0,8$, afficher
 Si $0,8 \leq r \leq 1$, afficher

Compléter l'algorithme.

29 *** [CH, REP] On donne le diagramme de loi suivant.



- Donner la loi de la variable aléatoire représentée.
- Calculer son espérance.
- Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

30 ** [RAI, COM] Un élève calcule une variance et trouve -2,4.

- Pourquoi ce résultat est-il impossible ?
- Quelle erreur de calcul peut expliquer cela ?
- Quelle vérification faut-il toujours faire ?

D — Problèmes et synthèse

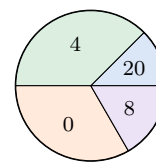
31 *** [MOD, CAL, REP] Une fête organise une tombola. Il y a 100 tickets. Les lots sont :

1 ticket rapporte 50 €, 4 tickets rapportent 10 €, 15 tickets rapportent 2 €.

Les autres tickets ne rapportent rien. Le ticket coûte 2 euros. On note X le gain algébrique du joueur.

- Déterminer les valeurs prises par X .
- Donner la loi de X .
- Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- Interpréter le résultat pour l'organisateur.

32 *** [MOD, CAL, REP] Un jeu utilise la roue suivante. La mise est de 3 euros. La somme affichée est le gain brut.



angles : 45° , 135° , 120° , 60°

- Déterminer les probabilités des quatre secteurs.
- Donner la loi du gain algébrique X .
- Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- Le jeu est-il équitable ?

33 *** [CH, MOD, RAI] Une assurance propose deux contrats. Le coût annuel pour l'assuré dépend du nombre de réparations nécessaires.

Nombre de réparations	0	1	2
Probabilité	0,6	0,3	0,1
Coût contrat A	300	500	700
Coût contrat B	420	420	420

- Définir deux variables aléatoires A et B .
- Calculer $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$.
- Comparer les deux contrats.
- Pourquoi l'espérance seule ne suffit-elle pas toujours à choisir ?

34 *** [CH, MOD, RAI] On joue au jeu suivant : on lance trois fois une pièce équilibrée. On gagne 5 euros si l'on obtient exactement trois piles, 2 euros si l'on obtient exactement deux piles, et on perd 1 euro sinon.

- Déterminer la loi du nombre N de piles.
- En déduire la loi du gain G .
- Calculer $\mathbb{E}(G)$.
- Calculer $\mathbb{P}(G > 0)$.

35 *** [CH, REP, CAL] Une entreprise observe le nombre de commandes reçues par heure. On modélise ce nombre par une variable aléatoire X .

Nombre de commandes x_i	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,25	0,35	0,2	0,1

- Calculer le nombre moyen de commandes par heure.
- Calculer la variance et l'écart-type.
- Interpréter l'écart-type dans le contexte.
- Estimer le nombre moyen de commandes sur 8 heures.

36 *** [CH, MOD, REP] On simule 1000 parties d'un jeu. La variable X donne le gain algébrique.

Gain observé	-2	1	8
Effectif sur 1000 simulations	610	305	85

- Calculer la moyenne observée sur les 1000 simulations.
- En déduire une approximation de $\mathbb{E}(X)$.
- Proposer une loi de probabilité cohérente avec ces effectifs.
- Pourquoi parle-t-on seulement d'approximation ?

37 *** [CH, RAI, COM] Un jeu a pour loi :

x_i	-4	1	20
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,7	0,25	0,05

Un organisateur annonce : « On peut gagner jusqu'à 20 euros, donc le jeu est intéressant. »

- Calculer l'espérance du gain.

2. Calculer la probabilité de perdre de l'argent.
3. Rédiger une réponse critique à l'annonce.

38 ★★ ★ [COM] Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes

maximum une fiche expliquant comment passer :

expérience aléatoire $\longrightarrow$ variable aléatoire $\longrightarrow$ loi $\longrightarrow$

Faire apparaître les mots : *issue*, *valeur*, *probabilité*, *moyenne*, *écart-type*.