

TD N23 — Indépendance, arbres

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Reconnaître ou tester l'indépendance de deux événements, construire et exploiter des arbres pondérés pour des épreuves indépendantes, traiter des répétitions d'épreuves de Bernoulli jusqu'à 4 répétitions, et distinguer une situation indépendante d'une situation dépendante.

Méthode repère. Deux événements A et B sont indépendants lorsque l'information « A est réalisé » ne change pas la probabilité de B . On peut écrire :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \quad \text{ou encore} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Arbre d'épreuves indépendantes. Si deux épreuves sont indépendantes, les probabilités de la deuxième épreuve ne changent pas selon la branche issue de la première.

Vigilance. Des événements incompatibles ne sont généralement pas indépendants. Ne pas confondre « indépendants » et « sans point commun ».

A — Réactivation : conditionnement et premiers tests

1. $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant que
 2. Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}_A(B) = \dots\dots\dots$
 3. Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \dots\dots\dots$
2. $\star$ [CAL] On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,4, \quad \mathbb{P}(B) = 0,7, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,28.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

3. $\star$ [CAL] On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,3, \quad \mathbb{P}_B(A) = 0,3.$$

Peut-on conclure que A et B sont indépendants ? Justifier.

4. $\star$ [REP, CAL] On choisit au hasard un élève dans un groupe de 40 élèves.

	Sport	Pas sport	Total
Fille	8	12	20
Garçon	8	12	20
Total	16	24	40

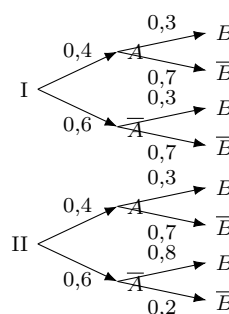
On note F : « l'élève est une fille » et S : « l'élève fait du sport ».

- Calculer $\mathbb{P}(S)$.
 - Calculer $\mathbb{P}_F(S)$.
 - Les événements F et S sont-ils indépendants ?
5. $\star$ [REP, CAL] Même question avec le tableau suivant.

	Musique	Pas musique	Total
Fille	14	6	20
Garçon	8	12	20
Total	22	18	40

On note F : « l'élève est une fille » et M : « l'élève fait de la musique ».

6. $\star$ [REP] Observer les deux arbres. Dans lequel la deuxième épreuve semble-t-elle indépendante de la première ?



7. $\star$ [COM] Expliquer en une phrase la différence entre : événements incompatibles et événements indépendants.

8. $\star$ [RAI] Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.
- Deux événements indépendants ne peuvent pas se produire en même temps.
 - Si $\mathbb{P}(A) = 0,2$ et $\mathbb{P}_A(B) = 0,5$, alors A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(B) = 0,5$.
 - Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont aussi.

B — Applications directes : tester, compléter, calculer

9. $\star\star$ [CAL] Dans chaque cas, dire si A et B sont indépendants.

$$\mathbb{P}(A) = 0,5, \quad \mathbb{P}(B) = 0,4, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,2.$$

$$\mathbb{P}(A) = 0,6, \quad \mathbb{P}(B) = 0,3, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,12.$$

$$\mathbb{P}(A) = 0,25, \quad \mathbb{P}(B) = 0,8, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,2.$$

10. $\star\star$ [CAL] On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,35, \quad \mathbb{P}(B) = 0,6.$$

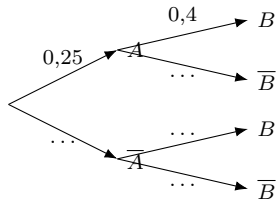
On suppose que A et B sont indépendants. Calculer :

$$\mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cap \bar{B}), \quad \mathbb{P}(\bar{A} \cap B).$$

11. $\star\star$ [REP, CAL] Compléter le tableau pour que les événements A et B soient indépendants.

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,18		0,3
$\bar{A}$			
Total	0,6		1

- 12 ** [REP, CAL] Compléter l'arbre d'une succession de deux épreuves indépendantes.



Calculer ensuite $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

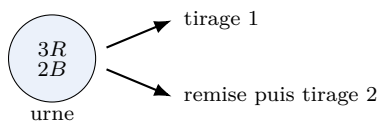
- 13 ** [CAL, REP] Une pièce équilibrée est lancée deux fois. On note P : « obtenir pile ».

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux piles.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un pile.

- 14 ** [CAL, REP] Un dé équilibré est lancé deux fois. On note S : « obtenir un six ».

1. Justifier que les deux épreuves sont indépendantes.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux six.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un six.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.

- 15 ** [REP, CAL] Dans une urne, il y a 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule, on la remet, puis on tire une deuxième boule.



1. Expliquer pourquoi les deux tirages sont indépendants.
2. Construire l'arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux rouges.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une rouge et une bleue, dans n'importe quel ordre.

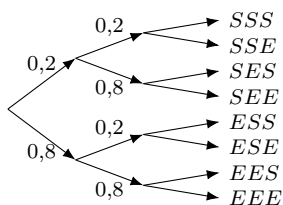
- 16 ** [REP, CAL] Même urne, mais cette fois on tire deux boules sans remise.

1. Les tirages sont-ils indépendants?
2. Construire l'arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux rouges.
4. Comparer avec l'exercice précédent.

- 17 ** [REP, CAL] On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de succès S , avec

$$\mathbb{P}(S) = 0,2.$$

Compléter l'arbre partiel.



Indiquer les probabilités manquantes sur les dernières branches.

- 18 ** [CAL] Avec l'arbre de l'exercice précédent, calculer :

$$\mathbb{P}(SSS), \quad \mathbb{P}(SSE), \quad \mathbb{P}(\text{exactement deux succès}), \quad \mathbb{P}(\text{au moins un succès})$$

- 19 ** [CAL] On répète 4 fois une épreuve indépendante dont la probabilité de succès est 0,3. Calculer :

$$\mathbb{P}(SSSS), \quad \mathbb{P}(EEEE), \quad \mathbb{P}(\text{exactement un succès}).$$

- 20 ** [REP, CAL] Compléter le tableau des chemins pour 3 répétitions indépendantes, avec $\mathbb{P}(S) = p$.

Chemin	Nombre de succès	Probabilité
SSS		
SSE		
SES		
ESS		
SEE		
ESE		
EES		
EEE		

C — Approfondissement : dépendance, compléments, répétitions

- 21 ** [RAI, COM] Un élève affirme : « Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants. »

1. Donner un exemple simple avec un lancer de dé.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
3. Corriger l'affirmation.

- 22 ** [CAL, RAI] On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,4, \quad \mathbb{P}(B) = 0,5.$$

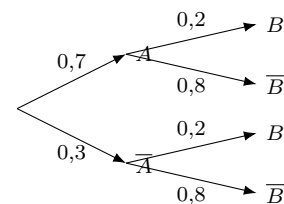
Déterminer la valeur de $x = \mathbb{P}(A \cap B)$ pour que A et B soient indépendants.

- 23 ** [CAL, RAI] On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,6, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,18.$$

Pour quelle valeur de $\mathbb{P}(B)$ les événements A et B sont-ils indépendants?

- 24 ** [REP, RAI] On considère l'arbre suivant.



1. Les événements A et B sont-ils indépendants?
2. Calculer $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$.
3. Les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont-ils indépendants?

- 25 *** [CH, REP] On cherche à construire un tableau de probabilités dans lequel A et B sont indépendants, avec :

$$\mathbb{P}(A) = 0,45, \quad \mathbb{P}(B) = 0,2.$$

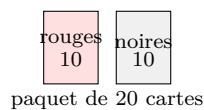
	B	$\bar{B}$	Total
A			
$\bar{A}$			
Total			1

Compléter entièrement le tableau.

- 26 *** [CH, RAI] Dans une population, 30% des individus ont une caractéristique A . On observe aussi que 18% des individus ont à la fois A et B .

1. Quelle doit être la valeur de $\mathbb{P}(B)$ pour que A et B soient indépendants ?
2. Interpréter ce résultat avec une phrase du type : « savoir que A est réalisé ne change pas... »

27 ** [REP, RAI] Une expérience consiste à tirer deux cartes successivement dans un paquet, sans remise. On note R_1 : « la première carte est rouge » et R_2 : « la deuxième carte est rouge ».



1. Construire l'arbre des deux tirages.
2. Comparer $\mathbb{P}(R_2)$ et $\mathbb{P}_{R_1}(R_2)$.
3. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

28 ** [REP, RAI] Même expérience, mais avec remise après le premier tirage.

1. Construire le nouvel arbre.
2. Comparer avec l'exercice précédent.
3. Expliquer pourquoi la remise rétablit l'indépendance.

29 *** [CAL, RAI] Une machine produit des pièces. Chaque pièce est conforme avec probabilité 0,96. On prélève 4 pièces de façon indépendante.

1. Calculer la probabilité que les 4 pièces soient conformes.
2. Calculer la probabilité qu'aucune des 4 pièces ne soit conforme.
3. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce ne soit pas conforme.

30 *** [CH, REP] On simule 3 répétitions indépendantes d'une épreuve de succès S , avec $\mathbb{P}(S) = 0,35$.

Répéter 3 fois :
tirer un nombre aléatoire r entre 0 et 1 ;
si $r < \dots\dots\dots$, alors on compte un succès ;
sinon on compte un échec.
Afficher le nombre total de succès.

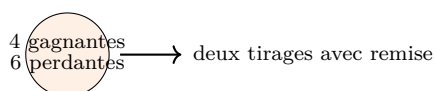
1. Compléter l'algorithme.
2. Expliquer pourquoi les répétitions sont modélisées comme indépendantes.
3. Que représente le nombre affiché ?

D — Problèmes et synthèse

31 *** [MOD, CAL, REP] Dans un jeu, on lance deux fois une pièce truquée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 0,6. Les deux lancers sont indépendants.

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux piles.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un pile.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un pile.

32 *** [MOD, CAL, REP] Un joueur tire successivement deux boules avec remise dans une urne contenant 4 boules gagnantes et 6 boules perdantes.



1. Justifier l'indépendance des deux tirages.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules gagnantes.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule gagnante.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule gagnante.

33 *** [MOD, RAI] On étudie deux événements :

A : « un client possède une carte de fidélité », B : « un client

Dans un magasin, on observe :

$$\mathbb{P}(A) = 0,5, \quad \mathbb{P}(B) = 0,3, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,15.$$

1. Tester l'indépendance de A et B .
2. Interpréter le résultat dans le contexte.
3. Un autre magasin a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,22$. Que peut-on dire ?

34 *** [CH, MOD, CAL] Une alarme fonctionne correctement avec probabilité 0,97 chaque jour. On suppose les jours indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'elle fonctionne correctement pendant 4 jours consécutifs.
2. Calculer la probabilité qu'elle tombe en panne au moins une fois sur ces 4 jours.
3. Expliquer pourquoi l'hypothèse d'indépendance peut être discutable.

35 *** [CH, MOD, RAI] Un questionnaire comporte 4 questions à deux réponses possibles. Un élève répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres réponses.

1. Quelle est la probabilité de répondre juste à une question ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir 4 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 bonnes réponses.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une bonne réponse.

36 *** [CH, REP, COM] On compare deux situations.

Situation 1	Situation 2
Deux tirages avec remise dans une urne.	Deux tirages sans remise dans une urne.
Les probabilités du deuxième tirage ne changent pas.	Les probabilités du deuxième tirage changent selon le premier résultat.

1. Associer chaque situation à « indépendante » ou « dépendante ».
2. Faire un petit arbre pour chacune.
3. Rédiger une phrase de méthode pour reconnaître l'indépendance dans un arbre.

37 *** [COM] Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

tester l'indépendance construire un arbre répéter une épreuve

Faire apparaître les mots : *information, conditionnelle, produit, remise, Bernoulli*.