

TD N22 — Probabilités conditionnelles

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Calculer une probabilité conditionnelle à partir d'un tableau ou d'un arbre, distinguer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, utiliser la règle du produit et la formule des probabilités totales, puis interpréter un conditionnement dans une situation concrète.

Méthode repère. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Dans un tableau, conditionner par A , c'est restreindre l'univers à la ligne, la colonne ou le groupe correspondant à A .

Arbre pondéré. Sur un chemin, on multiplie les probabilités des branches. Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

Vigilance. Ne pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$. L'information donnée change l'univers de référence.

A — Réactivation : événements, tableaux et information

1 ★ [REP]

On tire au hasard une carte dans un jeu simplifié de 20 cartes.
On considère :

R : « la carte est rouge »,
 F : « la carte est une figure ».

Traduire par une phrase :

$$\frac{R \cap F}{R \cap \bar{F}} \quad \frac{R \cap \bar{F}}{R \cap F}$$

2 ★ [REP]

Dans une classe de 30 élèves, on note :

L : « l'élève apprend le latin »,
 S : « l'élève est en spécialité sciences économiques ».

	S	$\bar{S}$	Total
L	6	4	10
$\bar{L}$	9	11	20
Total	15	15	30

Calculer :

$$\mathbb{P}(L), \quad \mathbb{P}(S), \quad \mathbb{P}(L \cap S), \quad \mathbb{P}(\bar{L} \cap S).$$

3 ★ [REP, COM]

Avec le tableau de l'exercice précédent, expliquer par une phrase la différence entre :

$$\mathbb{P}_L(S) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_S(L).$$

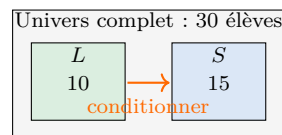
4 ★ [CAL]

Toujours avec le même tableau, calculer :

$$\frac{\mathbb{P}_L(S)}{\mathbb{P}_{\bar{L}}(S)} \quad \frac{\mathbb{P}_S(L)}{\mathbb{P}_{\bar{S}}(L)}$$

5 ★ [REP]

Compléter le schéma de changement d'univers.



Compléter :

$$\mathbb{P}_L(S) = \frac{\text{nombre d'élèves dans } L \cap S}{\text{nombre d'élèves dans } \dots}$$

6 ★ [CAL]

On donne $\mathbb{P}(A) = 0,4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,18$. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$.

7 ★ [CAL]

On donne $\mathbb{P}(C) = 0,25$ et $\mathbb{P}_C(D) = 0,6$. Calculer $\mathbb{P}(C \cap D)$.

8 ★ [RAI]

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

- $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$ sont toujours égales.
- $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- Si $\mathbb{P}_A(B) = 0$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

B — Applications directes : tableaux et arbres

9 ★ [CAL, REP]

Une association compte 80 adhérents. On les classe selon l'âge et la pratique d'une activité artistique.

	Art	Pas art	Total
Moins de 18 ans	18	12	30
18 ans ou plus	22	28	50
Total	40	40	80

On note J : « l'adhérent a moins de 18 ans » et A : « l'adhérent pratique une activité artistique ». Calculer :

$$\mathbb{P}(J), \quad \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}_J(A), \quad \mathbb{P}_A(J).$$

10 ★★ [CAL, REP]

Dans un lycée, on interroge 120 élèves sur leur mode de transport.

	Vélo	Autre	Total
Fille	18	42	60
Garçon	30	30	60
Total	48	72	120

On note F : « l'élève est une fille » et V : « l'élève vient à vélo ».

1. Calculer $\mathbb{P}_F(V)$ et $\mathbb{P}_V(F)$.

2. Interpréter chaque résultat par une phrase.

11 ★ [CAL]

On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,35, \quad \mathbb{P}_A(B) = 0,8.$$

Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

12 ★ [CAL]

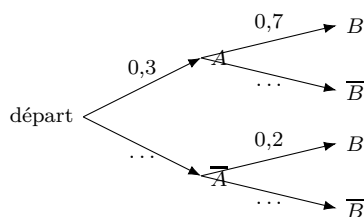
On donne :

$$\mathbb{P}(B) = 0,48, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,12.$$

Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.

13 ★★ [REP, CAL]

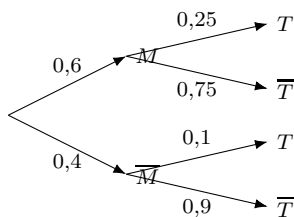
Compléter l'arbre pondéré.



Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, puis $\mathbb{P}(B)$.

14 ★★ [CAL, REP]

On considère l'arbre suivant.



Calculer :

$$\mathbb{P}(M \cap T), \quad \mathbb{P}(\overline{M} \cap T), \quad \mathbb{P}(T).$$

15 ★★ [CAL, REP]

Dans une usine, 55 % des pièces proviennent de la machine A et le reste de la machine B . La probabilité qu'une pièce issue de A soit défectueuse est 0,04, celle qu'une pièce issue de B soit défectueuse est 0,07.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

16 ★★ [CAL, REP]

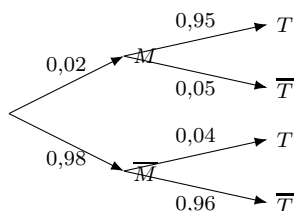
Un test médical est réalisé. On note :

M : « la personne est malade »,

T : « le test est positif ».

On sait que :

$$\mathbb{P}(M) = 0,02 \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,95 \\ \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,04$$



1. Calculer $\mathbb{P}(M \cap T)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$.

3. En déduire $\mathbb{P}(T)$.

4. Calculer $\mathbb{P}_T(M)$.

17 ★★ [REP, CAL]

On interroge au hasard un client d'un magasin. 70 % des clients sont inscrits au programme de fidélité. Parmi eux, 40 % utilisent un bon de réduction. Parmi les clients non inscrits, 15 % utilisent un bon.

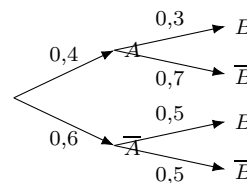
1. Définir deux événements adaptés.

2. Construire l'arbre pondéré.

3. Calculer la probabilité qu'un client utilise un bon.

18 ★★ [CAL, REP]

Compléter le tableau à partir de l'arbre.



	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			1

19 ★★ [CAL, REP]

On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,25, \quad \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0,6, \quad \mathbb{P}(B) = 0,51.$$

Calculer $\mathbb{P}_A(B)$. On pourra utiliser un arbre et la formule des probabilités totales.

20 ★★ [REP, CAL]

Une population est répartie en trois groupes G_1 , G_2 , G_3 formant une partition. On donne :

$$\mathbb{P}(G_1) = 0,2, \quad \mathbb{P}(G_2) = 0,5, \quad \mathbb{P}(G_3) = 0,3.$$

On sait aussi :

$$\mathbb{P}_{G_1}(R) = 0,4, \quad \mathbb{P}_{G_2}(R) = 0,1, \quad \mathbb{P}_{G_3}(R) = 0,6.$$

Calculer $\mathbb{P}(R)$.

C — Approfondissement : inverser et interpréter

21 ★★ [RAI, COM]

Un élève écrit :

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

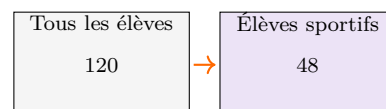
1. Expliquer pourquoi cette égalité est fausse en général.

2. Donner la formule correcte.

3. Donner un exemple numérique simple.

22 ★★ [REP, RAI]

Voici deux univers de référence pour la même situation.



Dans tout le lycée, 30 élèves jouent d'un instrument. Parmi les 48 élèves sportifs, 9 jouent d'un instrument. Calculer :

$$\mathbb{P}(I) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_S(I).$$

Interpréter la différence.

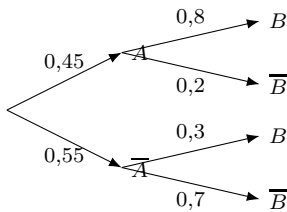
23 ** [CAL, RAI]

Dans un centre de formation, 65 % des inscrits suivent une formation courte. Parmi eux, 72 % réussissent l'examen. Parmi les autres inscrits, 84 % réussissent l'examen.

- Représenter la situation par un arbre.
- Calculer la probabilité qu'un inscrit réussisse l'examen.
- Un inscrit a réussi. Calculer la probabilité qu'il ait suivi une formation courte.

24 ** [CAL, RAI]

On dispose de l'arbre suivant.



- Calculer $\mathbb{P}(B)$.
- Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.
- Comparer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

25 ** [REP, RAI]

On donne le tableau suivant, exprimé en proportions.

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,18	0,12	
$\overline{A}$	0,28	0,42	
Total			1

- Compléter les marges du tableau.
- Calculer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$.
- Construire un arbre pondéré correspondant.

26 *** [CH, RAI]

On sait que A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. On donne :

$$\mathbb{P}(A) = 0,4, \quad \mathbb{P}_A(B) = 0,25, \quad \mathbb{P}(B) = 0,52.$$

Déterminer $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.

27 *** [CH, REP]

Dans un sondage, 40 % des personnes interrogées ont moins de 30 ans. Parmi les moins de 30 ans, 55 % utilisent principalement les transports en commun. Parmi les autres personnes, 25 % les utilisent principalement.

- Construire un arbre.
- Calculer la probabilité qu'une personne utilise principalement les transports en commun.
- Parmi les utilisateurs des transports en commun, calculer la probabilité d'avoir moins de 30 ans.

28 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Si B est très probable quand A est réalisé, alors A est très probable quand B est réalisé. »

- Cette phrase est-elle toujours vraie ?
- Utiliser un exemple de test médical ou de sondage pour expliquer.
- Rédiger une phrase de vigilance.

29 *** [CH, REP]

On lance un dé équilibré. On considère :

- A : « le résultat est pair »,
- B : « le résultat est au moins 5 »,
- C : « le résultat est 2 ou 4 ».

- Construire un tableau indiquant les issues 1, 2, 3, 4, 5, 6 et l'appartenance à A , B , C .
- Calculer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}_A(C)$, $\mathbb{P}_C(A)$.
- Interpréter les résultats égaux à 0 ou à 1.

30 *** [CH, REP]

On veut simuler le choix d'un individu dans une population où :

$$\mathbb{P}(A) = 0,3, \quad \mathbb{P}_A(B) = 0,6, \quad \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0,2.$$

Compléter l'algorithme en langage naturel.

Tirer un nombre aléatoire r entre 0 et 1.
 Si $r < \dots\dots\dots$, alors l'événement A est réalisé.
 Dans ce cas, tirer un second nombre s .
 Si $s < \dots\dots\dots$, alors B est réalisé.
 Sinon, on est dans $\overline{A}$.
 Dans ce cas, B est réalisé si le second nombre est inférieur à $\dots\dots\dots$

D — Problèmes et synthèse

31 *** [MOD, CAL, REP]

Un laboratoire utilise un test de dépistage. On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ». Dans la population testée :

$$\mathbb{P}(M) = 0,01, \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,98, \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,03.$$

À partir de ces données, déterminer la probabilité qu'une personne testée positive soit malade. Organiser la démarche avec la représentation de votre choix et interpréter le résultat dans le contexte.

32 *** [MOD, CAL, REP]

Une entreprise possède trois ateliers. La répartition de la production et les taux de défaut sont les suivants.

Atelier	Part de production	Taux de défaut
A_1	50 %	2 %
A_2	30 %	5 %
A_3	20 %	8 %

- Construire un arbre à trois branches.
- Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
- Une pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A_3 .

33 *** [MOD, RAI]

Une application classe automatiquement des messages en « importants » ou « non importants ». On sait que 20 % des messages sont importants. L'application signale comme importants 90 % des messages réellement importants, mais signale aussi à tort 15 % des autres messages. Déterminer la proportion de messages signalés comme importants qui le sont réellement. Présenter une modélisation claire, puis expliquer pourquoi le résultat obtenu peut être différent de 90 %.

34 *** [CH, MOD, RAI]

Dans une médiathèque, on choisit un abonné au hasard. Les données sont résumées dans le tableau.

	Emprunte souvent	Emprunte rarement	Total
Moins de 25 ans	36	24	60
25 ans ou plus	44	96	140
Total	80	120	200

1. Calculer la probabilité qu'un abonné emprunte souvent.
2. Calculer la probabilité qu'un abonné ait moins de 25 ans sachant qu'il emprunte souvent.
3. Calculer la probabilité qu'un abonné emprunte souvent sachant qu'il a moins de 25 ans.
4. Les deux probabilités conditionnelles répondent-elles à la même question ?

35 ★★★ [CH, MOD, RAI]

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en deux groupes :

J : « jeune conducteur »,
 $\overline{J}$: « autre conducteur ».

On sait que 18 % des clients sont jeunes conducteurs. La probabilité d'avoir un sinistre dans l'année est 0,12 pour un jeune conducteur et 0,04 pour un autre conducteur.

Évaluer la probabilité qu'un client ayant eu un sinistre soit un jeune conducteur. Présenter librement la modélisation et terminer par une conclusion prudente : que dit le calcul, et que ne dit-il pas ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

36 ★★★ [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

tableau croisé arbre pondéré
conditionnement probabilités totales

Faire apparaître les mots : *information, intersection, conditionnelle, partition, interprétation.*

.....

.....

.....

.....

.....