

TD N21 — Exponentielle II

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle, comparer un modèle discret et un modèle continu, déterminer un seuil par tableau, graphique ou algorithme, et interpréter le paramètre k dans une fonction du type $t \mapsto Ae^{kt}$.

Méthode repère. Un modèle continu exponentiel s'écrit souvent

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}.$$

Si $k > 0$, le modèle est croissant ; si $k < 0$, le modèle est décroissant.

Lien discret-continu. Aux dates entières,

$$Q(n) = Q_0 e^{kn} = Q_0 (e^k)^n.$$

La suite $(Q(n))$ est donc géométrique de raison e^k .

Vigilance. Dans un modèle discret, on passe d'une étape à la suivante par multiplication par une raison. Dans un modèle continu, la variable temps peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle.

A — Réactivation : coefficients, courbes et modèles

1 ★ [CAL]

Associer chaque évolution à son coefficient multiplicatif.

+5 %, -12 %, +30 %, -4 %.

2 ★ [CAL]

Une quantité vaut 200 au départ. Compléter le tableau pour une augmentation de 8 % par étape.

Étape n	0	1	2	3
Quantité u_n	200			

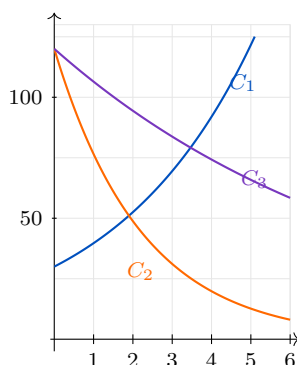
3 ★ [CAL]

On considère $Q(t) = 100e^{0,2t}$.

- Calculer $Q(0)$.
- Calculer $Q(1)$ et $Q(2)$, arrondis au dixième.
- Calculer $\frac{Q(1)}{Q(0)}$, puis $\frac{Q(2)}{Q(1)}$.

4 ★ [REP]

Observer les trois courbes et indiquer laquelle représente une croissance, une décroissance rapide et une décroissance lente.



5 ★ [REP, COM]

Compléter.

- Dans $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, le nombre Q_0 représente
- Si $k > 0$, alors Q est
- Si $k < 0$, alors Q est

6 ★ [CAL]

Pour chaque fonction, indiquer si elle modélise une croissance ou une décroissance.

$$\begin{aligned} f(t) &= 40e^{0,1t} \\ h(t) &= 12e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= 80e^{-0,3t} \\ p(t) &= 500e^{-0,02t} \end{aligned}$$

7 ★ [CAL, REP]

Compléter le tableau pour $f(t) = 50e^{-0,2t}$, au dixième près.

t	0	1	2	3
$f(t)$				

8 ★ [RAI]

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

- $100e^{-0,4t}$ est toujours positif.
- $100e^{-0,4t}$ devient négatif lorsque t est grand.
- Si $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, alors $Q(t+1) = e^k Q(t)$.

B — Applications directes : discret, continu, seuils

9 ★★ [CAL, RAI]

On considère le modèle continu

$$P(t) = 300e^{0,12t}.$$

- Donner la valeur initiale.
- Calculer $P(5)$, arrondi à l'unité.
- Déterminer la raison de la suite $(P(n))$, où $n \in \mathbb{N}$.

10 ★★ [CAL, RAI]

On considère le modèle

$$M(t) = 500e^{-0,08t}.$$

- Donner $M(0)$.
- Montrer que M est décroissante.
- Calculer $M(10)$, arrondi à l'unité.

4. Déterminer la raison de la suite $(M(n))$.

11 ** [REP, CAL]

Un capital de 1 000 euros augmente de 4 % par an. On note u_n le capital après n années.

1. Donner l'expression de u_n .

2. On cherche a tel que $e^a \approx 1,04$. À la calculatrice, on trouve $a \approx 0,0392$. Écrire un modèle continu approché $C(t)$.

3. Comparer u_5 et $C(5)$.

12 ** [REP, CAL]

Une population baisse de 7 % par an. Elle vaut 20 000 au départ.

1. Donner le modèle discret u_n .

2. On admet que $e^{-0,0726} \approx 0,93$. Proposer un modèle continu $P(t)$.

3. Calculer u_{10} et $P(10)$, arrondis à l'unité.

13 * [REP, CAL]

Compléter le tableau pour déterminer à partir de quand $Q(t) = 80e^{0,25t}$ dépasse 200, en testant les valeurs entières de t .

t	0	1	2	3	4
$Q(t)$					

14 * [REP, CAL]

Même question pour déterminer à partir de quand

$$N(t) = 600e^{-0,18t}$$

devient inférieur à 250. Tester les valeurs entières de t .

t	0	1	2	3	4	5
$N(t)$						

15 ** [CH, REP]

On veut déterminer le premier entier n tel que

$$100e^{0,3n} \geq 500.$$

Compléter l'algorithme.

```

n ← 0
Q ← 100
Tant que Q < .....
    n ← .....
    Q ← 100e0,3n
Fin Tant que
Afficher .....
```

16 ** [CH, REP]

On veut déterminer le premier entier n tel que

$$900e^{-0,2n} \leq 300.$$

Compléter.

```

n ← 0
Q ← .....
Tant que Q > .....
    n ← .....
    Q ← .....
Fin Tant que
Afficher .....
```

17 ** [REP, RAI]

Associer chaque situation au modèle le plus adapté.

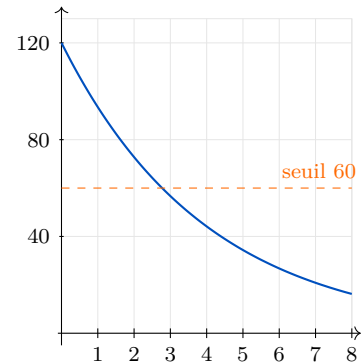
Situation	Modèle
Population qui augmente de 2 % par an	
Médicament éliminé à 18 % par heure	
Capital qui gagne 3 % par an	
Température qui se rapproche d'une valeur ambiante	

Modèles proposés :

$$Ae^{kt}, k > 0 \quad Ae^{kt}, k < 0 \quad T_a + Be^{-kt}.$$

18 ** [REP, CAL]

On donne la courbe de $Q(t) = 120e^{-0,25t}$.

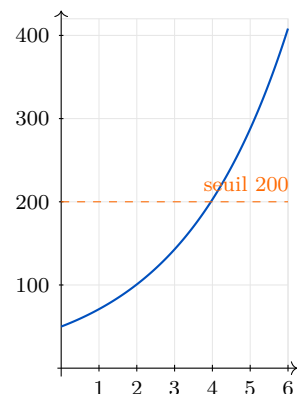


1. Lire graphiquement à partir de quand $Q(t) < 60$.

2. Vérifier par un calcul avec $t = 2$ et $t = 3$.

19 ** [REP, CAL]

On donne la courbe de $Q(t) = 50e^{0,35t}$.



Lire graphiquement le premier entier n tel que $Q(n) > 200$, puis vérifier par calcul.

20 ** [COM]

Expliquer en deux phrases la différence entre :

$$u_n = 500 \times 1,03^n \quad \text{et} \quad P(t) = 500e^{0,0296t}.$$

Que représentent n et t ?

C — Approfondissement : comparer et choisir un modèle

21 ** [RAI, CAL]

Une suite géométrique est définie par

$$u_n = 400 \times 1,08^n.$$

On admet que $e^{0,077} \approx 1,08$.

1. Écrire un modèle continu $P(t)$ qui coïncide approximativement avec la suite aux dates entières.

2. Comparer u_6 et $P(6)$.

3. Le modèle continu permet-il de donner une valeur à $t = 2,5$?

22 ** [RAI, CAL]

Une quantité suit le modèle continu

$$Q(t) = 700e^{-0,15t}.$$

1. Donner le modèle discret associé aux dates entières.
2. Donner la raison de la suite $(Q(n))$.
3. Interpréter cette raison en pourcentage d'évolution par unité de temps.

23 ** [CH, RAI]

On hésite entre deux modèles pour une population mesurée tous les ans.

Année n	0	1	2	3
Population observée	1000	1105	1221	1350

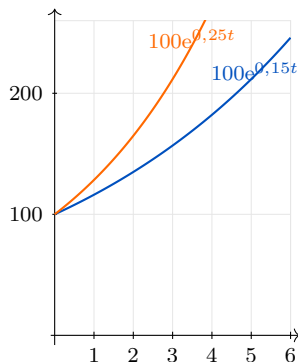
Modèle A : $u_n = 1000 \times 1,10^n$.

Modèle B : $P(t) = 1000e^{0,1t}$.

1. Compléter les valeurs prévues par chaque modèle pour $n = 1, 2, 3$.
2. Quel modèle semble le plus proche ?
3. Pourquoi les deux modèles sont-ils très proches ?

24 ** [REP, RAI]

Comparer les deux courbes suivantes.



1. Les deux fonctions ont-elles la même valeur initiale ?
2. Laquelle croît le plus vite ?
3. Quel paramètre explique cette différence ?

25 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Si deux modèles exponentiels ont la même valeur initiale, ils donnent toujours les mêmes prévisions. »

1. Donner un contre-exemple.
2. Expliquer le rôle du coefficient k .
3. Faire un croquis rapide pour illustrer.

26 ** [CH, REP]

On veut approcher le nombre e avec la suite

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Compléter le tableau à la calculatrice.

n	10	100	1000	10000
a_n				

Que semble-t-il se passer lorsque n devient grand ?

27 *** [CH, REP]

Compléter l'algorithme pour afficher les valeurs de

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

pour $n = 10, 100, 1000, 10000$.

Pour chaque valeur n dans la liste 10, 100, 1000, 10000

$a \leftarrow \dots\dots\dots$

Afficher n, a

Fin Pour

28 *** [CH, REP]

On approche une solution de l'équation

$$80e^{0,25t} = 200$$

par balayage avec un pas de 0,5.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$80e^{0,25t}$						

Encadrer la solution entre deux valeurs consécutives du tableau.

29 *** [CH, RAI]

On veut comparer deux investissements.

$$A(t) = 5000e^{0,035t}, \quad B(t) = 5200e^{0,02t}.$$

1. Quel placement a la plus grande valeur initiale ?
2. Quel placement croît le plus vite ?
3. Compléter le tableau.
4. Conjecturer à partir de quand $A(t) > B(t)$.

t	0	5	10	15
$A(t)$				
$B(t)$				

30 *** [RAI, COM]

Un modèle donne

$$P(t) = 1200e^{0,18t}.$$

Un élève dit : « Cela veut dire que la population augmente de 18 % par unité de temps. »

1. Calculer $e^{0,18}$.
2. Donner le pourcentage d'évolution entre $t = 0$ et $t = 1$.
3. Corriger la phrase de l'élève.

D — Problèmes et synthèse

31 *** [MOD, CAL, REP]

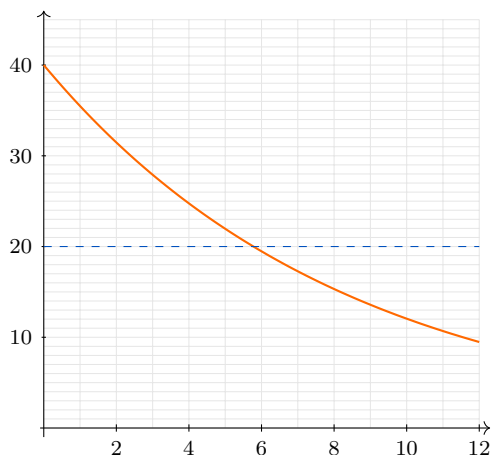
Une substance radioactive a une masse initiale de 40 g. Sa masse est modélisée par

$$M(t) = 40e^{-0,12t},$$

où t est exprimé en années.

À l'aide du graphique et des outils de votre choix, rédiger une réponse argumentée qui :

- estime la masse au bout de 5 ans ;
- détermine à partir de quand elle devient inférieure à 20 g ;
- précise et justifie la méthode retenue.



32 *** [MOD, CAL, REP]

Une culture de bactéries contient 2000 bactéries au départ. On modélise son évolution par

$$B(t) = 2000e^{0,45t},$$

où t est exprimé en heures.

1. Calculer $B(2)$, arrondi à l'unité.
2. Compléter le tableau.
3. Déterminer le premier entier n tel que $B(n) > 10\,000$.

t	0	1	2	3
$B(t)$				

33 *** [MOD, RAI]

Un médicament est injecté à un patient. La quantité présente dans le sang est modélisée par

$$Q(t) = 12e^{-0,35t},$$

où t est exprimé en heures et $Q(t)$ en mg.

1. Montrer que Q est décroissante.
2. Calculer la quantité restante au bout de 4 heures.
3. Le médicament est jugé efficace tant que $Q(t) \geq 3$. Compléter l'algorithme pour déterminer le premier entier n tel que $Q(n) < 3$.

```

n ← 0
Q ← 12
Tant que Q ≥ .....
    n ← .....
    Q ← .....
Fin Tant que
Afficher n

```

34 *** [CH, MOD, RAI]

Deux villes ont des populations modélisées par

$$A(t) = 15000e^{0,025t} \quad \text{et} \quad B(t) = 18000e^{0,010t}.$$

Comparer l'évolution des deux populations et déterminer si la ville A peut dépasser la ville B. Choisir une méthode adaptée, présenter les calculs ou représentations utiles, puis rédiger une conclusion interprétée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

35 *** [CH, MOD, COM]

Une entreprise annonce que ses ventes suivent le modèle

$$V(t) = 1000e^{0,5t}.$$

Analyser la pertinence de ce modèle à court et à long terme. Choisir quelques valeurs de t utiles à l'argumentation, effectuer les calculs nécessaires, puis rédiger une conclusion critique.

.....

.....

.....

.....

.....

36 *** [CH, REP, COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

modèle discret	modèle continu
tableau	algorithme de seuil

Faire apparaître les mots : *coefficient multiplicatif, raison, exponentielle, seuil, interprétation.*

.....

.....

.....

.....

.....