

TD N20 — Exponentielle I

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Manipuler la fonction exponentielle, utiliser ses propriétés algébriques, dériver des fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax+b}$, exploiter le signe de e^x , étudier des variations et interpréter des courbes exponentielles simples.

Méthode repère. La fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $\exp(x) = e^x$.

Propriétés utiles. Pour tous réels a et b ,

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad e^a > 0.$$

Vigilance. On ne développe pas e^{a+b} en $e^a + e^b$. L'exponentielle transforme une somme en produit.

A — Réactivation : puissances, dérivation et lectures graphiques

① ★ [CAL]

Simplifier les puissances suivantes.

$$2^3 \times 2^5, \quad \frac{3^7}{3^2}, \quad (5^2)^4, \quad 10^{-3} \times 10^5.$$

② ★ [CAL]

Même travail avec des écritures littérales.

$$a^2 \times a^6, \quad \frac{x^5}{x^2}, \quad (y^3)^4, \quad t^{-2} \times t^7.$$

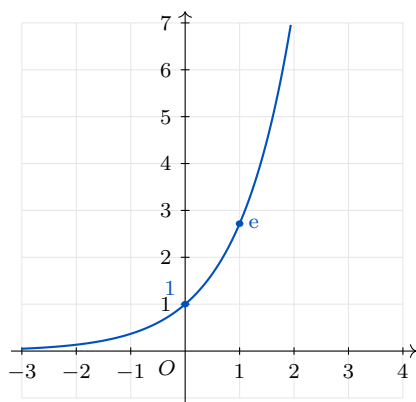
③ ★ [CAL]

Dériver les fonctions suivantes.

$$f(x) = 3x + 1, \quad g(x) = x^2 - 4x + 5, \quad h(x) = (2x - 1)^2.$$

④ ★ [REP]

On donne la courbe d'une fonction f . Lire graphiquement $f(0)$, $f(1)$, puis conjecturer le signe de $f(x)$.



⑤ ★ [REP, RAI]

Sur la courbe précédente, conjecturer le sens de variation de f . Que peut-on conjecturer sur le signe de $f'(x)$?

⑥ ★ [CAL]

Calculer avec la calculatrice, puis arrondir au centième.

$$e^0, \quad e^1, \quad e^{-1}, \quad e^2, \quad e^{-2}.$$

Classer ces nombres dans l'ordre croissant.

⑦ ★ [REP]

Associer chaque expression à la règle utilisée.

$$e^{a+b}, \quad e^{-a}, \quad \frac{e^a}{e^b}, \quad (e^a)^n.$$

Règles : produit, inverse, quotient, puissance.

⑧ ★ [COM]

Compléter.

- La fonction exponentielle est égale à sa propre
- Pour tout réel x , e^x est strictement
- La courbe de $x \mapsto e^x$ passe par le point

B — Applications directes

⑨ ★ [CAL]

Simplifier.

$$e^2 \times e^5, \quad e^{-3} \times e^7, \quad e^x \times e^3, \quad e^{2x} \times e^{-x}.$$

⑩ ★ [CAL]

Simplifier.

$$\frac{e^8}{e^3}, \quad \frac{e^{-1}}{e^4}, \quad \frac{e^{2x+1}}{e^x}, \quad \frac{e^{5x-2}}{e^{3x+4}}.$$

⑪ ★ [CAL]

Écrire sans exposant négatif.

$$e^{-4}, \quad 3e^{-x}, \quad \frac{2}{e^{-3}}, \quad 5e^{1-2x}.$$

⑫ ★★ [CAL]

Développer et simplifier.

$$e^x(e^x + 3), \quad e^{-x}(e^{2x} - 4), \quad (e^x + 2)(e^x - 5).$$

⑬ ★★ [CAL]

Factoriser.

$$2e^x + 6e^{2x}, \quad xe^x - 4e^x, \quad e^{2x} - e^x, \quad 3e^{x+1} + 6e^x.$$

⑭ ★ [CAL]

Dériver les fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & g(x) &= 5e^x \\ h(x) &= e^x + 3x & p(x) &= 2e^x - x^2 \end{aligned}$$

⑮ ★★ [CAL]

Dériver.

$$f(x) = e^{2x}$$

$$h(x) = e^{x+4}$$

$$g(x) = e^{-3x}$$

$$p(x) = e^{-x+1}$$

16 ** [CAL, RAI]

Étudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$A(x) = 3e^x$$

$$B(x) = -5e^x$$

$$C(x) = e^x + 2$$

$$D(x) = 4 - e^x$$

Pour D , on pourra utiliser la croissance de l'exponentielle.

17 ** [RAI]

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$e^x = 1, \quad e^x = e^3, \quad e^{2x-1} = e^5, \quad e^{-x+4} = e^{2x-2}.$$

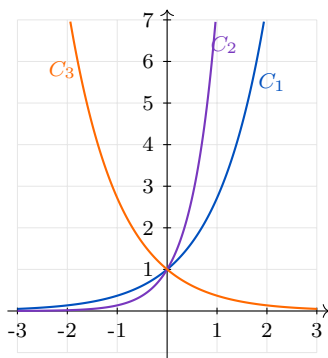
18 ** [RAI]

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$e^x < e^2, \quad e^{3x+1} \geq e^7, \quad e^{-2x} < e^4.$$

19 ** [REP, RAI]

On donne les courbes de $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{-x}$. Associer chaque courbe à sa fonction.



20 ** [CAL, REP]

Pour $f(x) = e^{kx}$, compléter le tableau.

k	Expression de $f'(x)$	Signe de $f'(x)$	Variation
2			
-1			
$\frac{1}{2}$			
-3			

C — Approfondissement : propriétés et variations

21 ** [REP, CAL]

Tracer à main levée l'allure de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{-x}$, puis indiquer pour chacune :

$$f(0), \quad f'(0), \quad \text{son sens de variation.}$$

22 ** [RAI, COM]

Un élève écrit :

$$e^{x+2} = e^x + e^2.$$

1. Expliquer l'erreur.
2. Donner l'égalité correcte.
3. Vérifier numériquement avec $x = 0$.

23 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Comme $e^x > 0$, l'expression $-2e^x + 1$ est toujours positive. »

1. Cette affirmation est-elle vraie ?

2. Résoudre $-2e^x + 1 > 0$.

3. Interpréter le résultat sur un axe.

24 ** [CAL, RAI]

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - 4x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$.
3. Construire le tableau de variations de f .

25 ** [CAL, RAI]

Étudier les variations de

$$g(x) = e^{-2x} + x.$$

On utilisera le fait que $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.

26 ** [CAL, RAI]

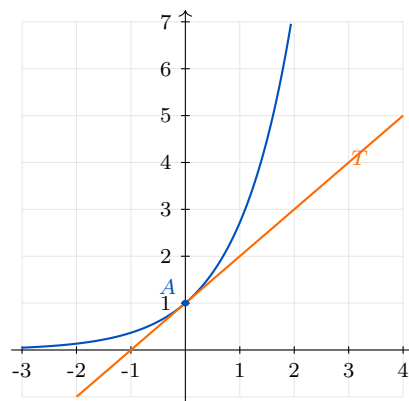
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 2)e^x.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f .

27 ** [REP, RAI]

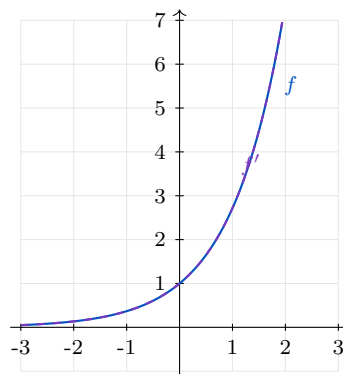
On donne la courbe de $f(x) = e^x$ et sa tangente au point d'abscisse 0.



1. Donner les coordonnées de A .
2. Donner $f'(0)$.
3. En déduire une équation de la tangente T .

28 ** [REP, RAI]

On donne les courbes de $f(x) = e^x$ et de sa dérivée f' . Que remarque-t-on ? Expliquer en utilisant la définition de la fonction exponentielle.



29 *** [CAL, REP]

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^{0,2n}.$$

1. Montrer que (u_n) est géométrique.
2. Donner sa raison.
3. Compléter le tableau et commenter l'évolution.

n	0	1	2	3	4
u_n					

30 *** [CH, RAI]

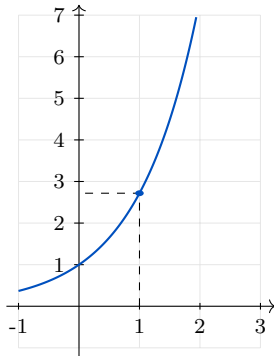
On considère la famille de fonctions

$$f_k(x) = e^{kx}.$$

1. Calculer $f'_k(x)$.
2. Selon le signe de k , donner le sens de variation de f_k .
3. Faire un croquis pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = -1$.

31 *** [CH, REP]

On veut retrouver graphiquement une valeur approchée de e . On donne la courbe de $x \mapsto e^x$.



1. Lire l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1.
2. Donner une valeur approchée de e .
3. Expliquer pourquoi $e^0 = 1$.

D — Problèmes et synthèse

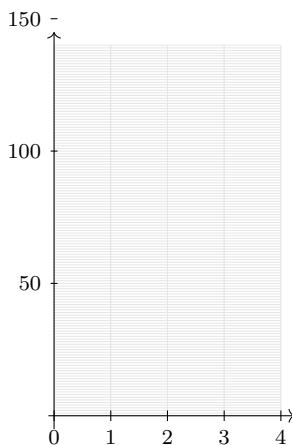
32 *** [CH, MOD, REP, CAL]

Une quantité évolue selon le modèle

$$Q(t) = 50e^{0,3t}.$$

Préparer une courte présentation de cette évolution sur l'intervalle $[0; 3]$. La production doit faire apparaître la valeur initiale, le sens de variation, quelques valeurs numériques et une représentation graphique. Organiser librement la démarche.

t	0	1	2	3
$Q(t)$				



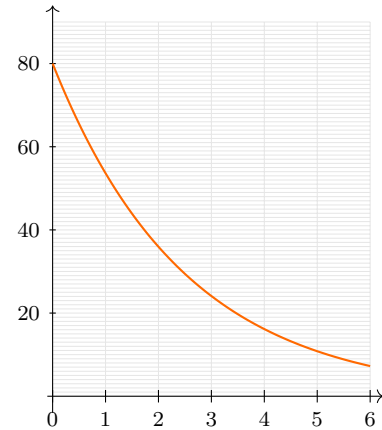
33 *** [MOD, REP, CAL]

Une substance se décompose selon le modèle

$$M(t) = 80e^{-0,4t}.$$

1. Donner la masse initiale.

2. Montrer que la fonction M est décroissante.
3. Calculer $M(2)$, arrondi au dixième.
4. Interpréter le résultat.



34 *** [CH, RAI, COM]

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$e^x \geq x + 1.$$

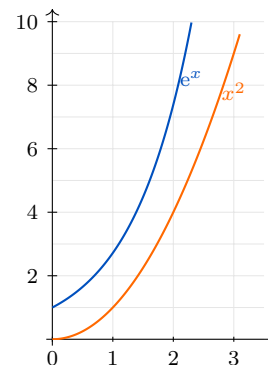
La démonstration devra être organisée et justifier clairement le choix de la fonction auxiliaire éventuellement étudiée.

35 *** [CH, RAI]

On veut comparer les fonctions

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2$$

sur l'intervalle $[0; 3]$.



1. Lire graphiquement laquelle des deux fonctions semble la plus grande près de 0.
2. Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f(1)$, $g(1)$, $f(2)$, $g(2)$.
3. Poser $h(x) = e^x - x^2$. Calculer $h'(x)$.
4. Expliquer pourquoi une lecture graphique ne suffit pas toujours à conclure sur tout un intervalle.

36 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Une population est modélisée par

$$P(t) = 1200e^{0,08t},$$

où t est le temps en années. Rédiger une note destinée au service municipal qui précise la population initiale, son évolution au cours des cinq premières années et la date approximative à laquelle le modèle dépasse 2000 habitants. Toute démarche cohérente, expliquée et vérifiée à la calculatrice est acceptée.

37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

propriétés algébriques dérivation
signe lecture graphique

Faire apparaître les mots : *exponentielle, positive, croissante, dérivée, courbe*.

