

TD N19 — Géométrie repérée

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Utiliser un repère orthonormé pour étudier des configurations : droites, vecteurs normaux, projetés orthogonaux, équations de cercles, intersections et lieux géométriques simples.

Méthode repère. Dans une équation $ax + by + c = 0$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite, et un vecteur directeur possible a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Cercle. Le cercle de centre $A(a; b)$ et de rayon r a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Vigilance. On distingue une droite, un cercle et une autre courbe en observant la forme de l'équation.

A — Réactivation : droites, distances et cercles

1 ★ [CAL]

Pour chaque droite, donner un vecteur normal et un vecteur directeur.

$$d_1 : 2x - 3y + 1 = 0, \quad d_2 : -x + 4y - 7 = 0, \\ d_3 : 5x + y = 0.$$

2 ★ [CAL]

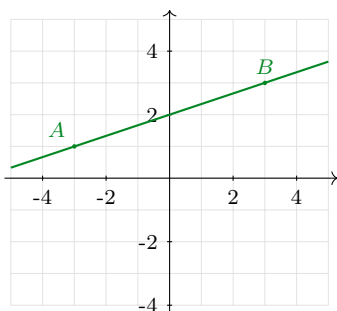
Tester si les points proposés appartiennent à la droite.

$$d : 3x - 2y + 5 = 0.$$

$$A(1; 4), \quad B(-1; 1), \quad C(3; 6).$$

3 ★ [CAL, REP]

Dans le repère ci-dessous, la droite d passe par les points $A(-3; 1)$ et $B(3; 3)$.



- Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- Donner un vecteur normal à d .
- Déterminer une équation cartésienne de d .

4 ★ [CAL]

Déterminer une équation du cercle de centre $C(2; -1)$ et de rayon 4.

5 ★ [CAL]

Déterminer le centre et le rayon des cercles suivants.

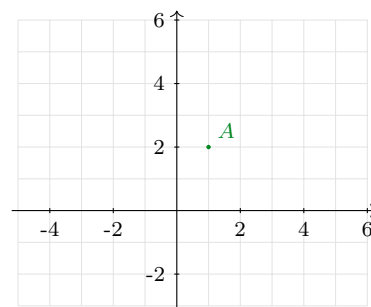
$$\mathcal{C}_1 : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16,$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + (y - 4)^2 = 25,$$

$$\mathcal{C}_3 : (x + 2)^2 + y^2 = 7.$$

6 ★ [REP]

Tracer dans le repère le cercle de centre $A(1; 2)$ et de rayon 3.



7 ★ [REP]

Dire si chaque équation définit une droite, un cercle ou une autre courbe.

$$2x - 5y + 1 = 0, \quad (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9,$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad xy + 2 = 0, \quad x^2 - y + 1 = 0.$$

8 ★ [COM]

Compléter.

- Le projeté orthogonal de A sur une droite d est le point H de d tel que (AH) est
- La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de
- Un point $M(x; y)$ appartient au cercle de centre $C(a; b)$ et de rayon r lorsque

B — Applications directes

9 ★ [CAL, RAI]

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(2; -3)$ et admettant le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

10 ★ [CAL, RAI]

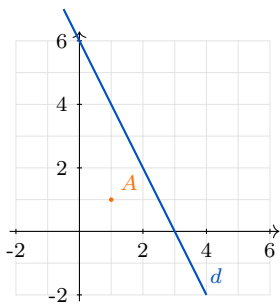
Même question pour la droite passant par $B(-1; 5)$ et admettant le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

11 ★★ [CAL, REP]

On considère la droite

$$d : 2x + y - 6 = 0$$

et le point $A(1; 1)$.



1. Donner un vecteur normal à d .
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à d passant par A .
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d .

12 ** [CAL, REP]

Même travail avec

$$d : x - 3y + 4 = 0$$

et $A(5; 2)$.

13 ** [CAL, RAI]

Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$, où

$$A(-2; 1), \quad B(4; 3).$$

On pourra utiliser le milieu de $[AB]$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

14 ** [CAL, RAI]

Même question avec

$$C(1; -4), \quad D(5; 2).$$

15 * [CAL]

Donner une équation du cercle de centre $A(-3; 2)$ et de rayon 5. Tester si le point $M(1; 5)$ appartient à ce cercle.

16 ** [CAL]

On considère le cercle

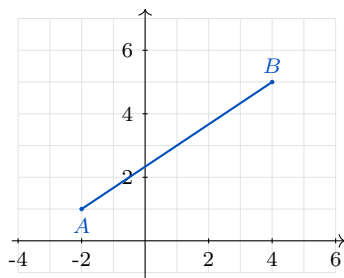
$$\mathcal{C} : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

1. Donner son centre et son rayon.
2. Tester si les points $A(7; -1)$, $B(2; 4)$ et $D(5; 2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$.

17 ** [CAL, REP]

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où

$$A(-2; 1), \quad B(4; 5).$$



18 ** [CAL]

Pour chaque équation, reconnaître un cercle lorsque c'est possible, puis donner son centre et son rayon.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0,$$

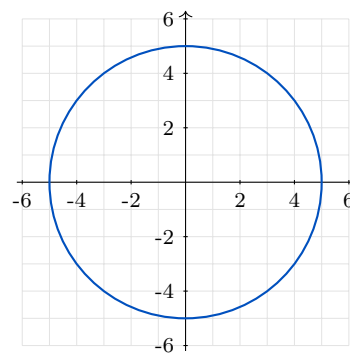
$$x^2 + y^2 - 4x + 10 = 0.$$

19 ** [CAL, REP]

Déterminer les points d'intersection du cercle

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$$

avec l'axe des abscisses, puis avec l'axe des ordonnées.



20 ** [CAL, REP]

Déterminer les points d'intersection du cercle

$$\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

avec la droite horizontale $y = 5$.

C — Approfondissement : configurations repérées

21 ** [CAL, REP]

On considère la droite $d : x = 3$ et le cercle

$$\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 20.$$

Déterminer les points d'intersection éventuels de d et $\mathcal{C}$.

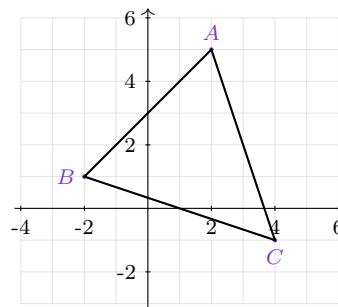
22 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Dans l'équation $3x - 2y + 7 = 0$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur. »

1. Corriger l'affirmation.
2. Donner un vecteur directeur possible.
3. Expliquer l'erreur en une phrase.

23 ** [CAL, RAI]

On donne $A(2; 5)$, $B(-2; 1)$ et $C(4; -1)$.



1. Déterminer une équation de la hauteur issue de A .
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de B .
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle.

24 ** [CAL, RAI]

On donne $A(-1; 2)$ et $B(5; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
2. Vérifier que tout point $M(x; y)$ de cette médiatrice vérifie $MA = MB$.
3. Tracer une figure de contrôle.

25 ** [CAL, REP]

Reconnaître l'équation du cercle, puis tracer une figure approximative.

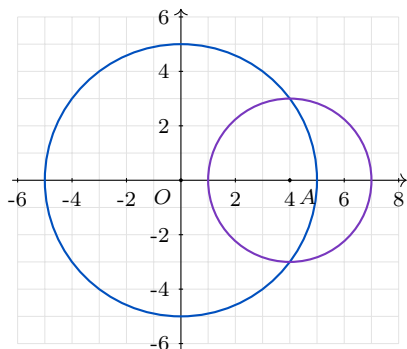
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0.$$

1. Mettre l'équation sous forme canonique.
2. Donner le centre et le rayon.
3. Placer le centre et quelques points du cercle.

26 **[CAL, REP]

On considère les deux cercles :

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 25, \quad \mathcal{C}_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 9.$$



1. Résoudre le système formé par les deux équations.
2. Déterminer les points d'intersection.
3. Contrôler graphiquement.

27 ***[CAL, RAI]

On cherche le cercle passant par les trois points

$$A(0;0), \quad B(4;0), \quad C(0;6).$$

On admet que son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

1. Utiliser les coordonnées de A , B , C pour déterminer a , b , c .
2. Donner le centre et le rayon du cercle.
3. Faire une figure cohérente.

28 ***[CAL, RAI]

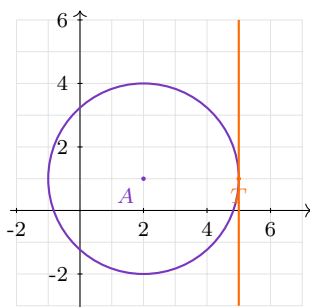
On donne les points $A(-2;0)$ et $B(4;0)$. On cherche l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

$$MA^2 + MB^2 = 40.$$

1. Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y .
2. Transformer l'égalité obtenue.
3. Décrire l'ensemble des points M .

29 ***[REP, RAI]

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2;1)$ et de rayon 3, et le point $T(5;1)$.



1. Vérifier que T appartient au cercle.
2. Expliquer pourquoi la tangente en T est perpendiculaire au rayon $[AT]$.
3. Déterminer une équation de cette tangente.

30 ***[CH, RAI]

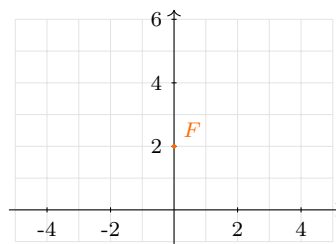
On donne la droite $d : x - 2y + 1 = 0$ et le cercle

$$\mathcal{C} : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13.$$

1. Déterminer les points d'intersection de d et $\mathcal{C}$.
2. Faire une figure de contrôle.
3. La droite est-elle sécante, tangente ou extérieure au cercle ?

31 ***[CH, REP]

On considère un point $F(0;2)$ et l'axe des abscisses. On cherche les points $M(x;y)$ équidistants de F et de l'axe des abscisses, avec $y \geq 0$.

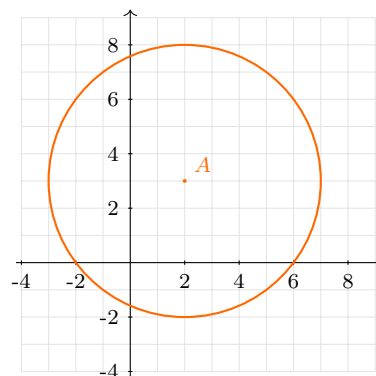


1. Exprimer la distance de $M(x;y)$ à l'axe des abscisses.
2. Exprimer MF^2 .
3. En déduire l'équation vérifiée par les points M .
4. Quelle courbe reconnaît-on ?

D — Problèmes et synthèse

32 ***[MOD, CAL]

Sur une carte, une antenne située en $A(2;3)$ émet dans un rayon de 5 km.



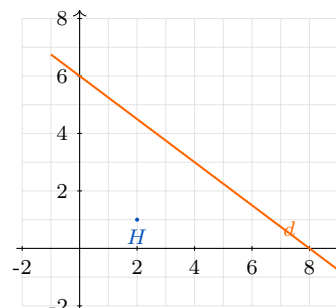
1. Donner une inéquation caractérisant la zone couverte.
2. Les points $P(6;6)$, $Q(-1;1)$ et $R(2;9)$ sont-ils couverts ?
3. Interpréter les résultats.

33 ***[MOD, CAL, REP]

Une route est modélisée par la droite

$$d : 3x + 4y - 24 = 0.$$

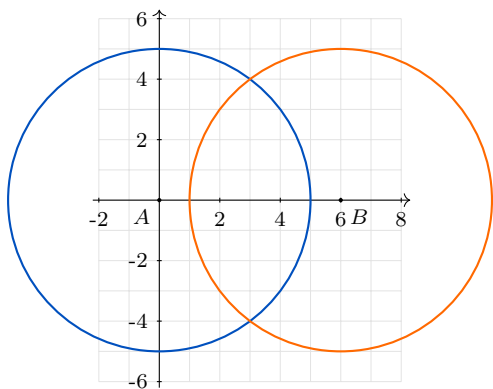
Un hôpital est situé en $H(2;1)$. On veut construire le chemin le plus court de l'hôpital à la route.



1. Déterminer une équation de la perpendiculaire à d passant par H .
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal K de H sur d .
3. Calculer la distance HK .

34 ***[MOD, RAI]

Deux antennes sont situées en $A(0;0)$ et $B(6;0)$. Un téléphone $M(x;y)$ est à 5 km de A et à 5 km de B .



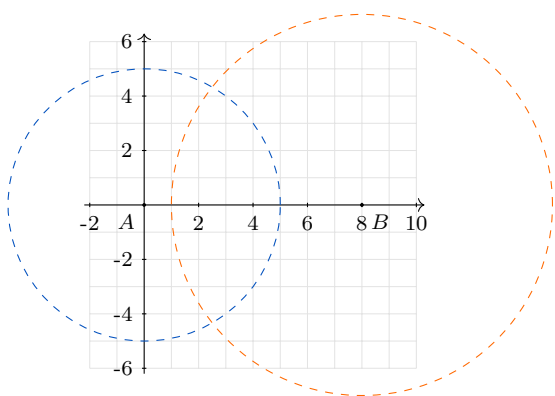
1. Écrire les deux équations de cercles.
2. Déterminer les positions possibles de M .
3. Pourquoi obtient-on deux positions possibles ?

35 *** [CH, MOD, RAI]

On veut construire un triangle ABC tel que

$$AB = 8, \quad AC = 5, \quad BC = 7.$$

On place $A(0;0)$ et $B(8;0)$.

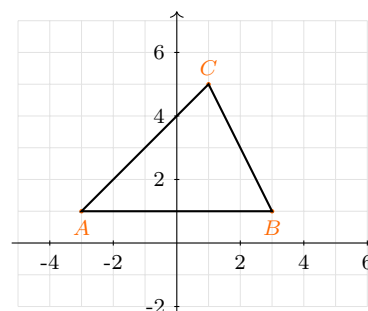


1. Expliquer pourquoi C est à l'intersection de deux cercles.
2. Écrire les deux équations vérifiées par $C(x;y)$.

3. Déterminer les coordonnées possibles de C .
4. Choisir le point d'ordonnée positive.

36 *** [CH, RAI]

On considère les points $A(-3;1)$, $B(3;1)$ et $C(1;5)$.



1. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AC]$.
3. En déduire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
4. Donner une équation du cercle circonscrit.

37 *** [CH, RAI, COM]

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O(0;0)$ et de rayon 5, et la droite

$$d_m : y = mx + 3,$$

où m est un réel.

1. Pour $m = 0$, déterminer les intersections de d_m et $\mathcal{C}$.
2. Pour $m = 1$, écrire le système à résoudre.
3. Expliquer comment le nombre de points d'intersection dépend de la position de la droite par rapport au cercle.

38 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre les quatre outils suivants : *équation de droite*, *projection orthogonale*, *équation de cercle* et *système*.

Faire apparaître les mots : *normal*, *perpendiculaire*, *centre*, *rayon*, *intersection*.