

TD N18 — Produit scalaire II

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Utiliser le produit scalaire en coordonnées, exploiter la bilinéarité et la symétrie, calculer des longueurs et des angles avec Al-Kashi, et reconnaître des lieux géométriques définis par une relation du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Méthode repère. En repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Pour un triangle, Al-Kashi donne par exemple

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Vigilance. Le produit scalaire est un nombre réel. Dans les calculs vectoriels, on nomme les propriétés utilisées : bilinéarité et symétrie.

A — Réactivation : coordonnées, normes et orthogonalité

1 ★ [CAL]

Dans un repère orthonormé, calculer les produits scalaires suivants.

$\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2 ★ [CAL]

Calculer la norme des vecteurs suivants.

$\vec{u} : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v} : \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\vec{w} : \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

3 ★ [RAI]

Dire si les vecteurs sont orthogonaux.

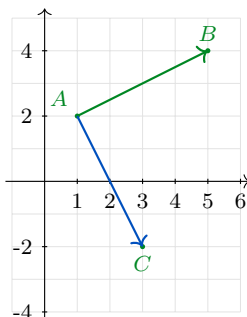
$\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{a}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4 ★ [CAL, REP]

On donne les points $A(1; 2)$, $B(5; 4)$ et $C(3; -2)$.

- Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?



5 ★ [CAL, RAI]

Dans chaque cas, calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ en utilisant l'identité :

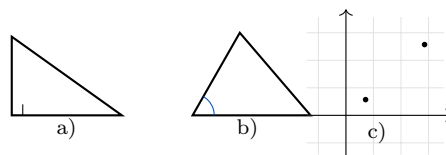
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

$$\|\vec{u}\| = 5, \quad \|\vec{v}\| = 3, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 4.$$

$$\|\vec{u}\| = 6, \quad \|\vec{v}\| = 2, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5.$$

6 ★ [REP]

Sur chaque figure, dire si l'on peut utiliser Pythagore, Al-Kashi ou le produit scalaire en coordonnées.



7 ★ [COM]

Compléter.

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont
- En coordonnées, le produit scalaire se calcule en multipliant les puis les et en additionnant.
- La norme induite par le produit scalaire vérifie $\|\vec{u}\| = \sqrt{\quad}$.

8 ★ [RAI]

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier brièvement.

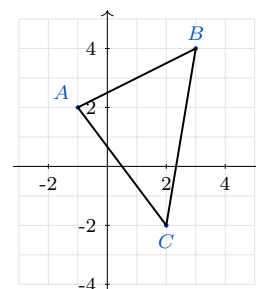
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\|\vec{u}\|^2 = 25$, alors $\|\vec{u}\| = 5$.

B — Applications directes avec figures

9 ★ [CAL, REP]

On donne $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(2; -2)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Calculer AB et AC .
- En déduire une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.



10 ★★ [CAL, RAI]

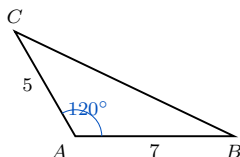
On donne $D(1; -3)$, $E(5; 1)$ et $F(-1; 3)$.

- Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

2. Le triangle DEF est-il rectangle en D ?
 3. Faire une figure de contrôle dans un repère.

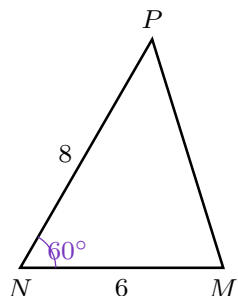
11 ** [CAL, REP]

Dans le triangle ci-contre, on donne $AB = 7$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Calculer BC .



12 ** [CAL, REP]

Dans le triangle MNP ci-contre, on donne $MN = 6$, $NP = 8$ et $\widehat{MNP} = 60^\circ$. Calculer MP .



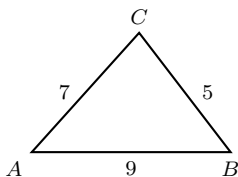
13 ** [CAL, REP]

Dans le triangle ABC , on donne $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 10$.

1. Faire une figure codée.
2. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$.
3. En déduire la nature du triangle.

14 ** [CAL, REP]

Dans le triangle ci-contre, $AB = 9$, $AC = 7$ et $BC = 5$. Déterminer une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.



15 ** [CAL, RAI]

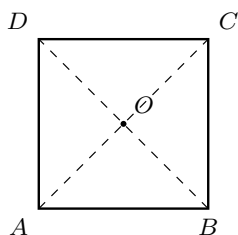
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2;1)$, $B(6;3)$, $C(1;5)$.

1. Calculer AB^2 , AC^2 et BC^2 .
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?
3. Contrôler avec le produit scalaire approprié.

16 ** [CAL, REP]

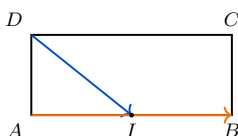
On considère le carré $ABCD$ de côté 6, de centre O . Calculer :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}.$$



17 ** [CAL, RAI]

Dans le rectangle $ABCD$, $AB = 10$ et $AD = 4$. Le point I est le milieu de $[AB]$. Calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AD}$.



18 ** [CAL, RAI]

On donne les points $A(-2;1)$, $B(4;3)$, $C(1;-4)$, $D(5;2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
3. Une perpendicularité peut-elle être déduite ?

19 ** [RAI, COM]

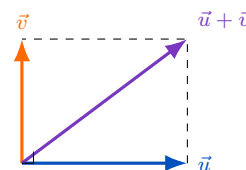
Un élève écrit :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

1. Dans quel cas cette égalité est-elle vraie ?
2. Écrire l'identité générale.
3. Faire une petite figure illustrant le cas où elle est vraie.

20 ** [CAL, REP]

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, puis retrouver ce résultat par Pythagore.



C — Approfondissement : identités et lieux géométriques

21 ** [RAI, CAL]

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5, \quad \|\vec{v}\| = 4, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 6.$$

Calculer :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2, \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

22 ** [RAI, CAL]

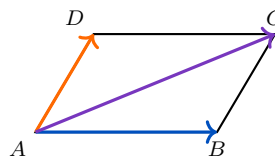
À l'aide de la bilinéarité et de la symétrie du produit scalaire, transformer :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}).$$

En déduire une expression en fonction de $\|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{v}\|^2$.

23 ** [RAI, CAL]

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme.



On pose $AB = 7$, $AD = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 10$.

1. Écrire $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer AC^2 .
3. En déduire AC .

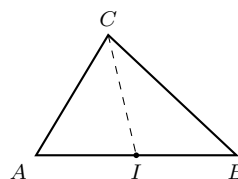
24 ** [RAI, CAL]

Dans le même parallélogramme, on sait maintenant que $AB = 8$, $AD = 5$ et $AC = 11$.

1. Utiliser l'identité $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ pour déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAD}$.

25 *** [CH, RAI]

Dans un triangle ABC , on note I le milieu de $[AB]$.



À l'aide de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB},$$

transformer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Que se simplifie grâce au fait que I est le milieu de $[AB]$?

26 *** [CH, RAI]

Soient deux points A et B , et I le milieu de $[AB]$. On admet que, pour tout point M ,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

1. Vérifier cette formule dans le cas $M = I$.
2. Vérifier cette formule dans le cas $M = A$.
3. Expliquer ce que représente géométriquement l'expression

$$MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

27 ** [REP, RAI]

On donne un segment $[AB]$ de longueur 8, de milieu I . Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

28 *** [REP, RAI]

On donne un segment $[AB]$ de longueur 10, de milieu I . Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 11.$$

Préciser le centre et le rayon du lieu obtenu.

29 *** [CH, RAI]

On donne un segment $[AB]$ de longueur 6, de milieu I . Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9.$$

Interpréter géométriquement le résultat.

30 ** [RAI, COM]

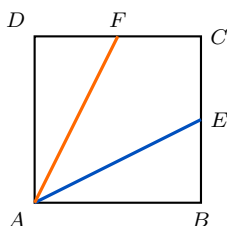
Un élève affirme : « L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la droite (AB) . »

1. Faire une figure pour tester l'affirmation.
2. Corriger la phrase.
3. Expliquer le lien avec le triangle rectangle.

D — Problèmes géométriques et synthèse

31 *** [CH, MOD, RAI]

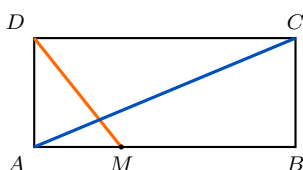
Dans un carré $ABCD$ de côté 4, E est le milieu de $[BC]$ et F est le milieu de $[CD]$.



1. Placer un repère orthonormé adapté.
2. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$.
3. En déduire une valeur approchée de $\widehat{EAF}$.

32 *** [CH, MOD, RAI]

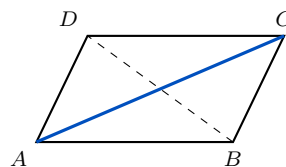
Dans un rectangle $ABCD$, $AB = 12$, $AD = 5$. Le point M est tel que $AM = 4$ sur $[AB]$.



1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DM}$ en utilisant un repère.
2. Les droites (AC) et (DM) sont-elles perpendiculaires ?
3. Modifier mentalement la position de M : où faudrait-il placer M pour obtenir une perpendicularité ?

33 *** [CH, RAI]

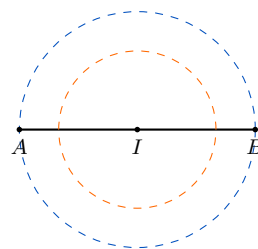
Dans un parallélogramme $ABCD$, on donne $AB = 8$, $AD = 5$ et $AC = 7$.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. En déduire la longueur BD .
3. Rédiger une conclusion claire.

34 *** [CH, RAI]

On considère deux points A et B tels que $AB = 12$. On note I le milieu de $[AB]$.

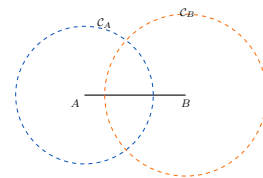


1. Déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 13$.
3. Comparer les deux lieux obtenus.

35 *** [CH, MOD, RAI]

On veut construire un triangle ABC tel que $AB = 9$, $AC = 6$ et $BC = 8$.

1. Expliquer pourquoi C est à l'intersection de deux cercles.
2. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$.
3. En déduire une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.



36 *** [CH, RAI, COM]

Une figure codée donne les informations suivantes :

$$AB = 5, \quad AC = 7, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14.$$

1. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$.
2. Calculer BC avec Al-Kashi.
3. Faire une figure cohérente.
4. Vérifier que le signe du produit scalaire est cohérent avec la mesure de l'angle.

37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre les quatre outils suivants : *coordonnées*, *identités vectorielles*, *Al-Kashi* et *lieu géométrique*.

Faire apparaître les mots : *orthonormé*, *bilinéarité*, *symétrie*, *longueur*, *cercle*.