

TD N17 — Produit scalaire I

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Comprendre le produit scalaire comme une mesure de projection orientée, utiliser les formules avec le cosinus et les coordonnées, interpréter son signe, caractériser l'orthogonalité et calculer des longueurs ou des angles.

Méthode repère. Selon les données, on choisit l'expression la plus efficace :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH},$$

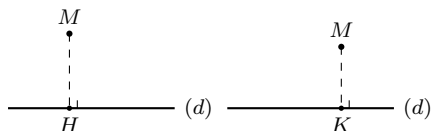
où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) . Cette dernière valeur est $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, et $-AB \times AH$ s'ils sont de sens opposés. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Vigilance. Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Il est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux.

A — Réactivation : projections, angles et orthogonalité

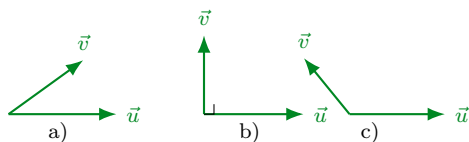
1 ★ [REP]

Sur chaque figure, identifier le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) .



2 ★ [REP]

Dans chaque cas, dire si l'angle entre les deux vecteurs est aigu, droit ou obtus.



3 ★ [CAL]

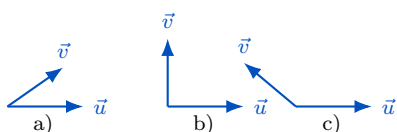
Calculer :

$$6 \times 4 \times \cos 60^\circ, \quad 8 \times 5 \times \cos 90^\circ, \quad 7 \times 3 \times \cos 120^\circ.$$

On rappelle que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$ et $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

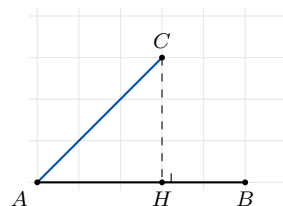
4 ★ [REP]

Pour chaque figure, indiquer si le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ semble positif, nul ou négatif.



5 ★ [REP]

Sur la figure, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) . Lire AB , AC et AH , puis indiquer quelle formule semble la plus adaptée pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



6 ★ [RAI]

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Si deux vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul.
2. Si deux vecteurs ont un angle obtus, leur produit scalaire est positif.
3. Si deux vecteurs sont de même direction et de même sens, leur produit scalaire est positif.

B — Applications directes : formules, coordonnées et orthogonalité

7 ★ [CAL]

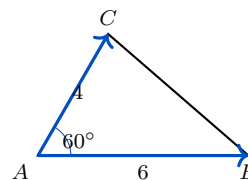
On donne $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 8$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut 60° . Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

8 ★ [CAL]

Même question si l'angle entre les deux vecteurs vaut 120° .

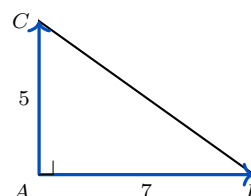
9 ★ [CAL, REP]

Dans le triangle ci-dessous, $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



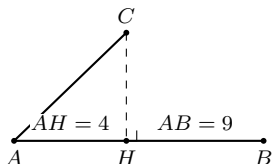
10 ★ [CAL, REP]

Dans la figure ci-dessous, $AB = 7$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis interpréter le résultat.



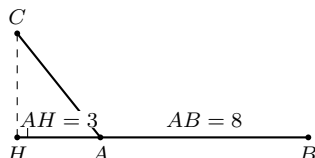
11 ** [CAL, REP]

Dans la figure ci-dessous, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , $AB = 9$ et $AH = 4$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



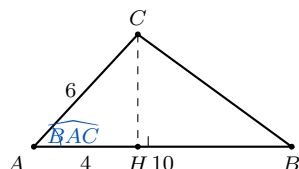
12 ** [CAL, REP]

Dans la figure ci-dessous, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , mais H est situé sur la demi-droite opposée à $[AB]$. On donne $AB = 8$ et $AH = 3$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



13 ** [CAL, REP]

Dans la figure, $AB = 10$, $AC = 6$ et $AH = 4$. Calculer de deux manières $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis en déduire $\cos(\widehat{BAC})$.



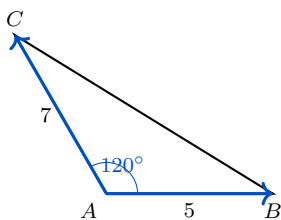
14 ** [CAL, RAI]

On donne $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$, $AB = 8$ et $AC = 6$.

1. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$.
2. En déduire la mesure de $\widehat{BAC}$.

15 ** [CAL, REP]

Dans le triangle ci-dessous, $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis expliquer pourquoi le résultat est négatif.



16 ** [CAL]

Dans un repère orthonormé, calculer les produits scalaires suivants :

$$\vec{u}(3; -2) \cdot \vec{v}(4; 5), \quad \vec{a}(-1; 6) \cdot \vec{b}(2; 3), \quad \vec{p}(5; 0) \cdot \vec{q}(0; -7).$$

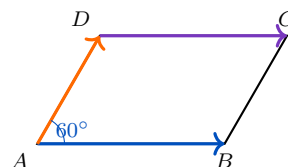
17 ** [CAL, RAI]

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(x; 2)$ et $\vec{v}(3; -6)$, où $x \in \mathbb{R}$. Déterminer x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

18 ** [CAL, RAI]

Dans le parallélogramme $ABCD$ ci-dessous, $AB = 6$, $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Calculer :

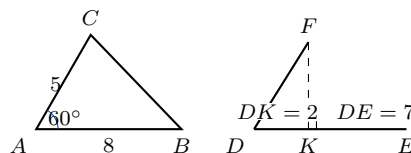
$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{AB} \cdot \vec{DC}.$$



C — Approfondissement : choisir la bonne lecture

19 ** [REP, CAL]

Dans chaque figure, choisir entre la formule avec le cosinus et la formule avec projection, puis calculer le produit scalaire demandé.



Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis $\vec{DE} \cdot \vec{DF}$.

20 ** [RAI, COM]

Un élève écrit :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB + AC + \cos(\widehat{BAC}).$$

1. Expliquer l'erreur.
2. Écrire la formule correcte.
3. Préciser la nature du résultat obtenu : longueur, angle ou nombre réel ?

21 ** [CAL, RAI]

Dans le triangle ABC , on sait que $AB = 9$, $AC = 4$ et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18.$$

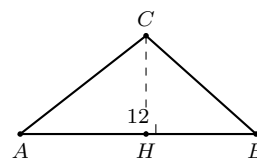
Calculer $\cos(\widehat{BAC})$, puis déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

22 ** [CAL, RAI]

Dans le triangle ci-dessous, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) . On donne $AB = 12$ et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 60.$$

Déterminer AH .

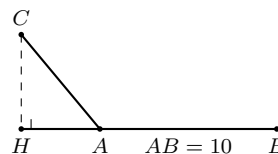


23 ** [CAL, RAI]

Dans la figure suivante, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , et H est situé hors du segment $[AB]$. On donne $AB = 10$ et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -30.$$

Déterminer la longueur AH .



24 ** [REP, CAL, RAI]

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$ et $C(0; -5)$.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$.
2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

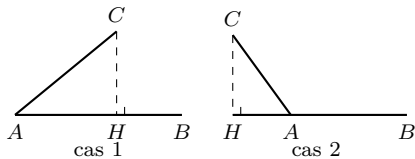
3. En déduire la nature du triangle ABC .

25 ** [REP, RAI]

Pour chaque figure, compléter l'égalité

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH},$$

puis l'exprimer à l'aide des longueurs AB et AH , avec le signe convenable.



26 ** [CH, RAI]

On considère un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 5$ et

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0.$$

Que peut-on dire de l'angle $\widehat{BAC}$? Faire une figure possible.

27 *** [CAL, RAI]

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 6$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

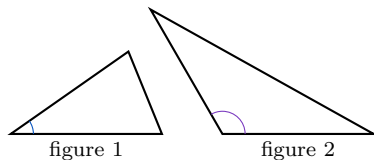
1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2. À l'aide de la bilinéarité et de la symétrie du produit scalaire, écrire

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}).$$

3. En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

28 *** [REP, RAI]

On donne deux figures. Dans laquelle le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est-il le plus grand? Justifier sans calcul détaillé.

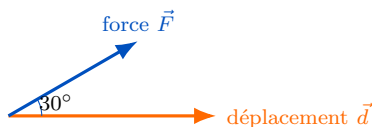


29 ** [MOD, CAL]

Une force $\vec{F}$ de norme 80 N déplace un objet selon un vecteur $\vec{d}$ de norme 15 m. L'angle entre la force et le déplacement vaut 30° . Le travail est modélisé par :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Calculer W , arrondi à l'unité.



30 ** [MOD, RAI]

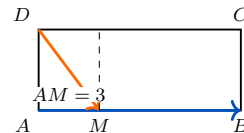
Même situation, mais la force fait un angle de 120° avec le déplacement.

1. Faire une figure.
2. Calculer le travail W .
3. Interpréter le signe obtenu.

31 *** [CH, MOD, RAI]

Dans un rectangle $ABCD$, on donne $AB = 10$, $AD = 4$, $M \in [AB]$ et $AM = 3$. Calculer

$$\vec{AB} \cdot \vec{DM}.$$

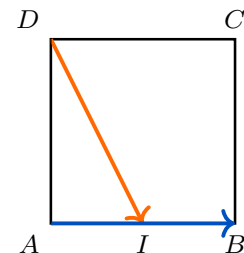


32 *** [CH, RAI]

Dans un carré $ABCD$ de côté 6, I est le milieu de $[AB]$. Calculer

$$\vec{DI} \cdot \vec{AB}.$$

On pourra utiliser une projection orthogonale.



33 *** [CH, MOD, RAI]

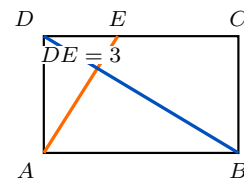
Dans le triangle ABC , H est le projeté orthogonal de C sur (AB) . On donne :

$$AB = 11, \quad AC = 7, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 44.$$

1. Déterminer AH .
2. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$.
3. Faire une figure cohérente avec les résultats.

34 *** [CH, RAI, COM]

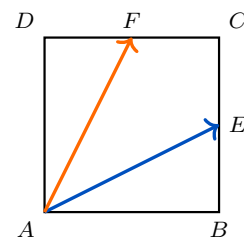
Dans le rectangle $ABCD$, on donne $AB = 8$, $AD = 5$, et $E \in [DC]$ avec $DE = 3$. Démontrer que les droites (AE) et (BD) ne sont pas perpendiculaires.



35 *** [CH, RAI]

Dans le carré $ABCD$ de côté 4, E est le milieu de $[BC]$ et F celui de $[CD]$.

1. Faire apparaître une projection utile.
2. Calculer $\vec{AE} \cdot \vec{AF}$.
3. L'angle $\widehat{EAF}$ est-il aigu, droit ou obtus?



36 *** [CH, REP, COM]

On veut expliquer le produit scalaire à partir d'une projection.

1. Faire une figure avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant un angle aigu.
2. Tracer la projection orthogonale de l'extrémité de $\vec{v}$ sur la direction de $\vec{u}$.
3. Écrire une phrase expliquant le rôle de cette projection dans le calcul de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

formule avec le cosinus et formule avec projection.

Faire apparaître les mots : *angle*, *projection*, *orthogonal*, *signe*, *nombre réel*.

D — Problèmes géométriques et synthèse