

Objectif du TD. Enrouler la droite numérique sur le cercle trigonométrique, convertir degrés et radians, placer un point-image, déterminer sinus et cosinus d'un réel, utiliser les valeurs remarquables, puis exploiter la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus.

Méthode repère. Un réel x repère un point M_x du cercle trigonométrique. Ses coordonnées sont $M_x(\cos x; \sin x)$. On réduit souvent un angle modulo 2π pour revenir à un angle connu.

Vigilances. Le cosinus est l'abscisse, le sinus est l'ordonnée. Un tour complet vaut 2π radians. La calculatrice doit être réglée en radians lorsque l'on travaille avec π .

A — Réactivation : angles, fractions de tour et cercle

1 ★ [CAL]

Exprimer en degrés les fractions de tour suivantes : $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}$.

2 ★ [CAL]

Compléter le tableau de conversion.

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Radians					

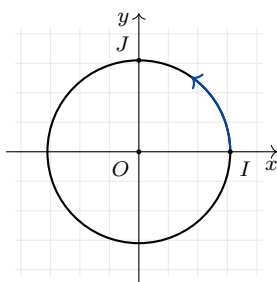
3 ★ [CAL]

Calculer et donner le résultat sous la forme $a\pi$, avec a rationnel simplifié.

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi - \frac{7\pi}{6}, \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}.$$

4 ★ [REP]

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, placer les points associés aux réels $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$.



5 ★ [REP]

Placer sur un cercle trigonométrique les points associés aux réels $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, puis indiquer leur quadrant.

6 ★ [CAL, REP]

Réduire chaque réel modulo 2π , puis donner un réel associé dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

$$\frac{13\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{7\pi}{2}.$$

7 ★ [REP]

Compléter.

- $\cos x$ est l'..... du point M_x .
- $\sin x$ est l'..... du point M_x .
- Le sens direct est le sens des aiguilles d'une montre.

8 ★ [RAI]

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier brièvement.

- Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$ ont le même point-image.
- Les réels $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ ont le même point-image.
- Les réels π et $-\pi$ n'ont pas le même point-image.

B — Applications directes

9 ★ [REP, CAL]

Pour chacun des réels suivants, donner le point remarquable du cercle trigonométrique associé : $0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$.

10 ★ [CAL]

Déterminer les valeurs exactes.

$$\cos 0, \quad \sin 0, \quad \cos \frac{\pi}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2}, \quad \cos \pi, \quad \sin \pi.$$

11 ★★ [CAL]

Déterminer les valeurs exactes.

$$\cos \frac{\pi}{6}, \quad \sin \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{\pi}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{3}, \quad \sin \frac{\pi}{3}.$$

12 ★★ [CAL, REP]

À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les valeurs exactes.

$$\cos \frac{5\pi}{6}, \quad \sin \frac{5\pi}{6}, \quad \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \sin \frac{2\pi}{3}.$$

13 ★★ [CAL, REP]

Même question pour :

$$\cos \frac{7\pi}{6}, \quad \sin \frac{7\pi}{6}, \quad \cos \frac{4\pi}{3}, \quad \sin \frac{4\pi}{3}.$$

14 ★★ [CAL, REP]

Même question pour :

$$\cos \frac{11\pi}{6}, \quad \sin \frac{11\pi}{6}, \quad \cos \frac{5\pi}{3}, \quad \sin \frac{5\pi}{3}.$$

15 ★★ [CAL]

Calculer en réduisant d'abord modulo 2π .

$$\cos \frac{13\pi}{6}, \quad \sin \frac{17\pi}{4}, \quad \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

16 ★★ [RAI, CAL]

On sait que $\sin x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

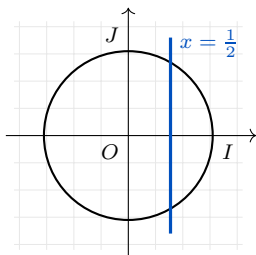
- Utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Déterminer $\cos x$.

17 ★★ [RAI, CAL]

On sait que $\cos x = -\frac{5}{13}$ et que $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Déterminer $\sin x$.

18 ** [REP]

Sur le cercle, tracer la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. En déduire graphiquement les réels de $[0; 2\pi[$ qui vérifient $\cos t = \frac{1}{2}$.



19 ** [REP]

Sur un cercle trigonométrique, résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20 ** [CAL, REP]

Compléter le tableau.

x	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{2\pi}{3}$		
$\frac{5\pi}{6}$		
$\frac{4\pi}{3}$		
$\frac{11\pi}{6}$		

C — Approfondissement : symétries, équations et fonctions

21 ** [RAI, COM]

Un élève écrit : « $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, car $\frac{5\pi}{6}$ est associé à 30° . »

- Repérer l'erreur.
- Donner la valeur correcte.
- Expliquer avec le quadrant.

22 ** [RAI, CAL]

À l'aide des symétries du cercle trigonométrique, exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$:

$$\cos(-x), \quad \sin(-x), \quad \cos(\pi - x), \quad \sin(\pi - x).$$

23 ** [RAI, CAL]

Simplifier.

$$\cos(x + 2\pi), \quad \sin(x + 2\pi), \quad \cos(x - 2\pi), \quad \sin(x - 2\pi).$$

24 ** [CAL, REP]

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les équations suivantes.

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin x = 0.$$

25 ** [CAL, REP]

Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ les équations suivantes.

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

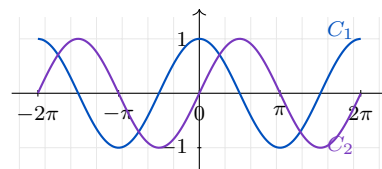
26 ** [REP, RAI]

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les inéquations suivantes à l'aide du cercle trigonométrique.

$$\sin x \geq \frac{1}{2}, \quad \cos x < 0.$$

27 ** [REP, RAI]

On donne les deux courbes ci-dessous. Identifier la courbe de $x \mapsto \cos x$ et celle de $x \mapsto \sin x$. Justifier à l'aide des valeurs en 0.



28 ** [REP, RAI]

Sur les courbes précédentes :

- lire les valeurs de $\cos 0$, $\sin 0$, $\cos \pi$, $\sin \pi$;
- retrouver graphiquement la période commune des deux fonctions ;
- indiquer la symétrie visible pour chaque fonction.

29 *** [RAI, CAL]

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x.$$

Préciser la propriété utilisée.

30 *** [CH, RAI]

On sait que $\cos x = \sin x$ et que $x \in [0; 2\pi[$.

- Interpréter cette égalité sur le cercle trigonométrique.
- Déterminer les solutions possibles.
- Vérifier avec les valeurs remarquables.

31 *** [CH, REP]

On veut résoudre graphiquement $\sin x \leq \cos x$ sur $[0; 2\pi[$.

- Utiliser les courbes de $\sin$ et $\cos$ pour conjecturer les solutions.
- Contrôler la conjecture à l'aide du cercle trigonométrique.

D — Problèmes et synthèse

32 *** [MOD, REP]

Une roue de fête foraine est modélisée par un cercle de rayon 20 m. Un point M de la roue est repéré par un réel t sur le cercle trigonométrique, puis agrandi par le facteur 20.

- Donner les coordonnées de M lorsque $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$.
- Exprimer les coordonnées de M en fonction de t .
- Quelle coordonnée permet de connaître la hauteur relative du point ?

33 *** [MOD, CAL]

Un phare balaie l'horizon en tournant régulièrement. On modélise la direction du faisceau par le point $M_t(\cos t; \sin t)$.

- Le faisceau pointe vers l'est pour $t = 0$. Donner les réels de $[0; 2\pi[$ correspondant au nord, à l'ouest et au sud.
- Donner deux réels positifs différents qui correspondent à la direction est.
- Expliquer pourquoi le modèle est périodique.

34 *** [CH, MOD, RAI]

On considère un signal périodique modélisé par $f(t) = \sin t$.

- Déterminer les instants $t \in [0; 2\pi[$ où $f(t) = 0$.
- Déterminer les instants où $f(t) = 1$ et où $f(t) = -1$.
- Interpréter les réponses comme des positions sur le cercle trigonométrique.

35 *** [CH, REP, COM]

On souhaite construire une fiche de valeurs remarquables.

- Compléter un tableau avec $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, puis les valeurs de $\cos$ et $\sin$.
- Ajouter une colonne « quadrant » pour expliquer les signes dans les autres quadrants.
- Rédiger une phrase expliquant comment retrouver rapidement les valeurs dans les quadrants II, III et IV.

36 *** [CH, RAI, COM]

Un élève affirme : « Comme $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, alors toutes les solutions de $\sin x = \frac{1}{2}$ sont de la forme $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. »

1. Expliquer pourquoi cette réponse est incomplète.
2. Donner toutes les solutions dans $[0; 2\pi[$.
3. Donner ensuite la forme générale des solutions dans $\mathbb{R}$.

37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche

expliquant comment passer :

réel x $\longrightarrow$ point-image M_x $\longrightarrow$ $\cos x$ et $\sin x$.

Faire apparaître les mots : *radian*, *abscisse*, *ordonnée*, *période*, *valeur remarquable*.