

TD N15 — Droites et équations

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Traduire une contrainte géométrique en équation de droite, reconnaître un vecteur directeur ou normal, déterminer une équation cartésienne, tester l'appartenance d'un point à une droite et étudier des positions relatives.

Méthode repère. Une droite peut être décrite par deux points, un point et un vecteur directeur, ou une équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Vigilance. Dans $ax + by + c = 0$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite ; un vecteur directeur possible est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

A — Réactivation : points, vecteurs, alignement

1 ★ [CAL]

Dans un repère, on donne $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2 ★ [CAL]

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} \text{ avec } A(-3; 4), B(1; -2),$$

$$\overrightarrow{CD} \text{ avec } C(5; 0), D(2; 7).$$

3 ★ [RAI]

Dire si les vecteurs sont colinéaires.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4 ★ [CAL, RAI]

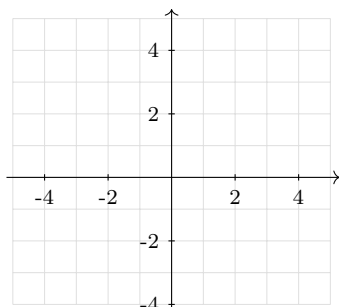
Les points $A(1; 2)$, $B(4; 8)$ et $C(6; 12)$ sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs.

5 ★ [CAL, RAI]

Même question avec $A(-1; 3)$, $B(2; 1)$ et $C(5; -1)$.

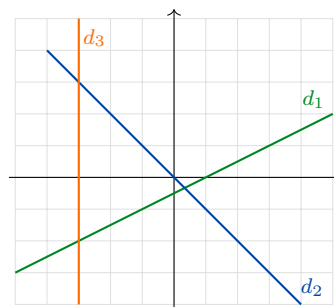
6 ★ [REP]

Sur le repère ci-dessous, placer les points $A(-3; 1)$, $B(1; 3)$, $C(4; -1)$, puis tracer la droite (AB) .



7 ★ [REP]

Pour chaque droite, donner un vecteur directeur possible.



8 ★ [COM]

Compléter.

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d , alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi
- Si A et B sont deux points distincts d'une droite d , alors $\overrightarrow{AB}$ est

B — Applications directes

9 ★ [CAL, REP]

On considère la droite d passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Placer A , puis construire deux autres points de d .
- Donner les coordonnées possibles de deux points de d .

10 ★ [CAL]

Pour chaque équation, tester si le point $A(2; -1)$ appartient à la droite.

$$d_1 : 3x - y - 7 = 0, \quad d_2 : x + 2y = 0, \quad d_3 : -2x + 5y + 3 = 0.$$

11 ★ [CAL]

Pour chaque droite, donner un vecteur normal et un vecteur directeur.

$$d_1 : 2x - 3y + 5 = 0$$

$$d_2 : -x + 4y - 1 = 0$$

$$d_3 : 5x + y = 0$$

12 ★★ [CAL, RAI]

Montrer que le point $A(3; -2)$ appartient à la droite d'équation

$$4x + y - 10 = 0.$$

Donner ensuite un vecteur normal et un vecteur directeur de cette droite.

13 ** [CAL]

Une caméra de surveillance installée au point $A(2;1)$ filme dans la direction du vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Le grillage de l'enceinte, perpendiculaire à cet axe de visée, passe par A . Déterminer une équation cartésienne de ce grillage.



14 ** [CAL]

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $B(-1;5)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

15 ** [CAL, RAI]

On considère la droite d passant par $A(1;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur normal possible à d .
2. En déduire une équation cartésienne de d .

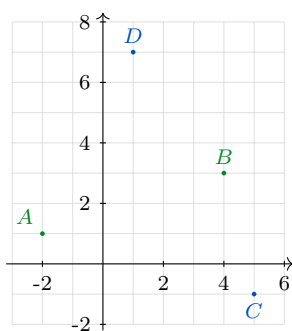
16 ** [CAL, RAI]

Même travail pour la droite passant par $C(3;4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

17 ** [CAL]

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les deux points donnés.

1. $A(-2;1)$ et $B(4;3)$.
2. $C(5;-1)$ et $D(1;7)$.



18 * [CAL, REP]

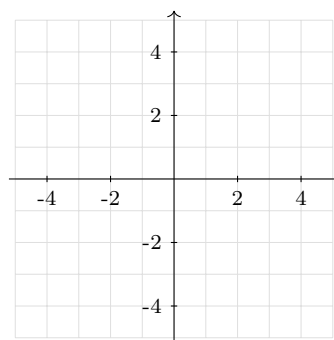
Pour chaque équation, écrire y en fonction de x , puis donner le coefficient directeur.

$$2x - y + 3 = 0, \quad 3x + 2y - 8 = 0, \quad -y + 5 = 0.$$

19 ** [REP]

Tracer dans le repère les droites :

$$d_1 : y = 2x - 1, \quad d_2 : y = -x + 3, \quad d_3 : x = 2.$$



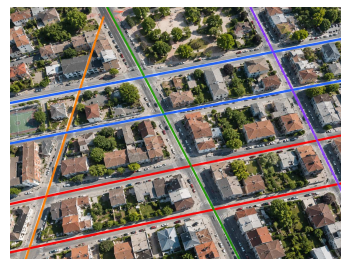
20 ** [CAL, REP]

Dans un plan de quartier, deux rues sont modélisées par les équations suivantes. Sont-elles parallèles ?

$$\text{rue 1 : } 2x - 3y + 1 = 0, \quad \text{rue 2 : } 4x - 6y - 5 = 0.$$

Même question pour deux autres rues :

$$\text{rue 3 : } x + 2y - 7 = 0, \quad \text{rue 4 : } 2x - y + 4 = 0.$$



C — Approfondissement et changements de registre

21 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Dans l'équation $2x - 5y + 1 = 0$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur. »

1. Corriger l'affirmation.
2. Donner un vecteur directeur possible.
3. Expliquer l'erreur en une phrase.

22 ** [RAI]

Soit $d : 3x - 4y + 7 = 0$.

1. Vérifier que $A(3;4)$ appartient à d .
2. Donner un vecteur directeur de d .
3. Construire un autre point de d sans résoudre l'équation.

23 ** [CAL, RAI]

Soit d la droite passant par $A(2;-3)$ et $B(6;5)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de d .
2. Donner une équation cartésienne de d .
3. Vérifier que A et B satisfont l'équation obtenue.

24 ** [CAL, RAI]

On donne les droites :

$$d : 2x - y + 4 = 0, \quad \Delta : -4x + 2y - 1 = 0.$$

1. Donner un vecteur normal de chaque droite.
2. Les droites sont-elles parallèles ?
3. Sont-elles confondues ? Justifier.

25 ** [CAL]

Déterminer le point d'intersection des droites :

$$d_1 : x + 2y - 5 = 0, \quad d_2 : 3x - y - 4 = 0.$$

26 ** [CAL]

Même question avec :

$$d_1 : 2x - y + 1 = 0, \quad d_2 : -x + 3y - 8 = 0.$$

27 ** [RAI]

Dans chaque cas, dire si les deux droites sont sécantes, strictement parallèles ou confondues.

$$d_1 : 3x - 2y + 1 = 0, \quad d_2 : 6x - 4y - 5 = 0.$$

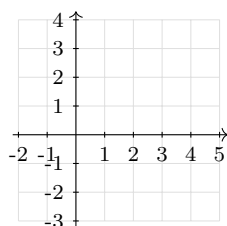
$$d_3 : x + y - 4 = 0, \quad d_4 : 2x + 2y - 8 = 0.$$

$$d_5 : 2x + 3y - 1 = 0, \quad d_6 : x - y + 2 = 0.$$

28 ** [REP, CAL]

On donne trois points $A(0; 2)$, $B(4; 0)$ et $C(1; -1)$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. Le point C appartient-il à (AB) ?
3. Tracer une figure pour contrôler.



29 *** [CH, RAI]

Soit d_m la droite d'équation :

$$(m + 1)x - 2y + 3 = 0,$$

où m est un réel.

1. Donner un vecteur normal de d_m .
2. Pour quelle valeur de m , la droite d_m est-elle parallèle à la droite $\Delta : 3x - 2y + 5 = 0$?
3. Pour cette valeur de m , les droites sont-elles confondues ?

30 *** [CH, REP]

On cherche une droite passant par $A(1; 2)$ et parallèle à la droite

$$d : 5x - 3y + 4 = 0.$$

1. Quelle information doit-on conserver pour obtenir une droite parallèle ?
2. Déterminer une équation de la droite cherchée.
3. Vérifier que A appartient bien à cette droite.

31 *** [CH, RAI]

On cherche une droite passant par $B(-2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Simplifier le choix du vecteur directeur.
2. Donner un vecteur normal possible.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite.

D — Problèmes et synthèse

32 *** [MOD, CAL]

Dans un repère représentant une carte, une route rectiligne passe par les points $A(2; 1)$ et $B(8; 4)$.

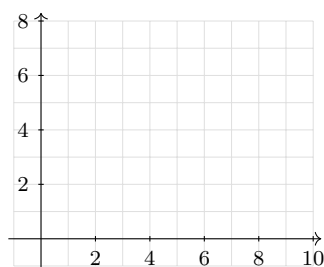
1. Déterminer une équation cartésienne de la route.
2. Le point $M(12; 6)$ est-il sur cette route ?
3. Le point $N(10; 4)$ est-il sur cette route ?
4. Interpréter les réponses dans le contexte.

33 *** [MOD, REP]

Une piste cyclable est modélisée par la droite

$$d : 2x + 3y - 18 = 0.$$

1. Donner deux points de la piste.
2. Donner un vecteur directeur de la piste.
3. Tracer une représentation de la piste dans un repère.
4. Un poste de secours situé en $S(3; 4)$ est-il sur la piste ?



34 *** [CH, MOD, RAI]

Un robot se déplace en ligne droite. À l'instant 0, il est au point $A(1; 3)$. À chaque étape, son déplacement est donné par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les positions du robot aux étapes 1, 2, 3.
2. Déterminer une équation cartésienne de sa trajectoire.
3. Le robot passera-t-il par le point $P(11; -2)$?
4. Le robot passera-t-il par le point $Q(8; -1)$?

35 *** [CH, RAI]

On considère le triangle ABC avec

$$A(1; 1), \quad B(7; 3), \quad C(3; 6).$$

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation de la droite passant par C et parallèle à (AB) .
3. Le point $D(9; 8)$ appartient-il à cette parallèle ?
4. Rédiger une conclusion géométrique.

36 *** [CH, CAL, COM]

On donne trois droites :

$$d_1 : x + y - 6 = 0, \quad d_2 : 2x - y = 0, \quad d_3 : x - 4y + 6 = 0.$$

1. Déterminer les points d'intersection deux à deux.
2. Les trois droites sont-elles concourantes ?
3. Tracer une figure de contrôle.

37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment passer de deux points à un vecteur directeur, puis à une équation cartésienne. Faire apparaître les mots : *coordonnées*, *colinéaire*, *normal*, *appartenance*, *vérification*.