

TD N13 — Sommes et modèles discrets

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif du TD. Calculer et interpréter des sommes de termes consécutifs, utiliser les formules adaptées aux suites arithmétiques et géométriques, puis résoudre des problèmes de cumul, de seuil et de modélisation discrète.

Méthode repère. Identifier ce que représente u_n : valeur à l'étape n ou quantité ajoutée à l'étape n . Une somme sert à calculer un cumul.

Formules utiles. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Vigilance. Ne pas confondre le dernier terme u_n et la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

A — Réactivation et premiers cumuls

1 ★ [CAL]

Calculer mentalement les sommes suivantes.

$$1 + 2 + \dots + 10, \quad 1 + 2 + \dots + 20, \quad 5 + 6 + \dots + 15.$$

2 ★ [CAL]

Calculer les sommes géométriques suivantes.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16, \quad 3 + 6 + 12 + 24, \quad 100 + 50 + 25 + 12,5.$$

3 ★ [REP]

Pour chaque expression, dire s'il s'agit d'un **terme** ou d'une **somme**.

$$u_8, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_8, \quad S_{12}, \quad 5 \times 1,2^7.$$

4 ★ [CAL]

On considère la suite arithmétique définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .

2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

5 ★ [CAL]

On considère la suite géométrique définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n$.

1. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 .

2. Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$.

6 ★ [REP]

Dans chaque situation, dire si l'on cherche un terme ou une somme.

1. Le nombre de vues le dixième jour.

2. Le nombre total de vues pendant les dix premiers jours.

3. La population au bout de cinq ans.

4. Le nombre total de livres achetés pendant cinq mois.

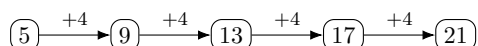
7 ★ [CAL, REP]

Compléter le tableau pour $u_n = 2n + 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

n	0	1	2	3	4
u_n					
S_n					

8 ★ [REP]

On donne le schéma d'évolution suivant.



Donner la nature de la suite, sa raison, puis calculer la somme des cinq termes affichés.

B — Applications directes

9 ★ [CAL]

Calculer les sommes suivantes, à l'aide de la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ si besoin.

$$1. \quad 1 + 2 + \dots + 50, \quad 1 + 2 + \dots + 100, \quad 1 + 2 + \dots + 250.$$

$$2. \quad 11 + 12 + \dots + 30, \quad 25 + 26 + \dots + 80, \quad 101 + 102 + \dots + 200.$$

10 ★★ [CAL]

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $r = 4$.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

2. Calculer u_{20} .

3. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

11 ★★ [CAL]

Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_1 = 12$ et $r = 5$.

1. Calculer v_{15} .

2. Calculer $v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$.

12 ★ [CAL]

Calculer les sommes suivantes.

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^6, \quad 1 + 0,5 + 0,5^2 + \dots + 0,5^8.$$

13 ★★ [CAL]

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.

1. Donner l'expression de u_n .

2. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

14 ★★ [CAL]

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 120$ et de raison $q = 0,8$.

1. Donner l'expression de v_n .

2. Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_6$. Arrondir au dixième.

15 ★★ [MOD, CAL]

Un coureur augmente sa distance d'entraînement de 1,5 km chaque semaine. La première semaine, il court 8 km. On note u_n la distance courue la semaine n , avec $u_0 = 8$.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique.

2. Exprimer u_n en fonction de n .

3. Calculer la distance totale courue pendant les 10 premières semaines.

16 ★★ [MOD, CAL]

Une vidéo est vue 500 fois le premier jour. Chaque jour, le nombre de vues du jour est multiplié par 1,2. On note u_n le nombre de vues le jour n , avec $u_0 = 500$.

1. Justifier que (u_n) est géométrique.

- Exprimer u_n en fonction de n .
- Estimer le nombre total de vues pendant les 8 premiers jours.

17 ** [REP, CAL]

Compléter le tableau pour déterminer à partir de quand la somme dépasse 100.

n	$u_n = 7 + 4n$	$S_n = u_0 + \dots + u_n$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

18 ** [REP, CAL]

Compléter le tableau pour déterminer à partir de quand la somme dépasse 300.

n	$v_n = 20 \times 1,4^n$	$S_n = v_0 + \dots + v_n$
0		
1		
2		
3		
4		
5		

19 ** [REP, CAL]

On considère l'algorithme suivant.

```

n ← 0
u ← 12
S ← 12
Tant que S < 100
    n ← n + 1
    u ← u + 8
    S ← S + u
Fin Tant que
Afficher n, S

```

Compléter une trace d'exécution et indiquer ce que représentent les valeurs affichées.

20 ** [MOD, CAL]

Un magasin vend 40 articles le premier jour d'une opération, puis 6 articles de plus chaque jour.

- Modéliser le nombre d'articles vendus le jour n par une suite (u_n) .
- Calculer le nombre total d'articles vendus pendant les 15 premiers jours.

C — Approfondissement et seuils

21 ** [RAI, CAL]

Calculer :

$$48 + 49 + \dots + 132.$$

Expliquer clairement comment déterminer le nombre de termes.

22 ** [RAI, CAL]

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 17$ et $u_{18} = 77$.

- Déterminer la raison de la suite.
- Calculer $u_3 + u_4 + \dots + u_{18}$.

23 ** [RAI, CAL]

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = 1,5$ telle que $v_2 = 12$.

- Déterminer v_0 .
- Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_8$.

24 ** [RAI, COM]

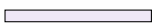
Un élève écrit :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 11u_{10}.$$

- Cette égalité est-elle vraie en général ?
- Donner un contre-exemple avec une suite simple.
- Écrire une phrase expliquant l'erreur.

25 ** [MOD, REP]

Une salle de spectacle possède 18 sièges au premier rang, puis 4 sièges de plus à chaque rang.

rang 4  30 sièges
 rang 3  26 sièges
 rang 2  22 sièges
 rang 1  18 sièges

- Modéliser le nombre de sièges au rang n , avec $n \geq 1$.
- Combien y a-t-il de sièges au 20-ième rang ?
- Combien y a-t-il de sièges dans les 20 premiers rangs ?

26 ** [MOD, CAL]

Une association reçoit 1000 euros de dons la première semaine. Chaque semaine, les dons diminuent de 10 %.

- Modéliser le montant reçu la semaine n , avec $u_0 = 1000$.
- Calculer le montant reçu la sixième semaine.
- Calculer le total reçu pendant les six premières semaines.

27 ** [REP, RAI]

On donne deux suites :

$$u_n = 30 + 10n \quad \text{et} \quad v_n = 30 \times 1,1^n.$$

On note $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + \dots + v_n$.

- Calculer S_5 et T_5 .
- Comparer les deux cumuls.
- Expliquer pourquoi le modèle géométrique peut finir par dépasser le modèle arithmétique.

28 *** [CH, CAL]

On pose $u_0 = 25$ et $u_{n+1} = 1,3u_n$. On veut savoir à partir de quel rang la somme $S_n = u_0 + \dots + u_n$ dépasse 500.

- Compléter le tableau jusqu'au dépassement.
- Écrire une phrase interprétant le rang obtenu.

n	u_n	S_n
0	25	25
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

29 *** [CH, REP]

Compléter l'algorithme pour qu'il détermine le premier rang n tel que

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \geq 1000$$

pour la suite définie par $u_0 = 40$ et $u_{n+1} = 1,25u_n$.

```

n ← 0
u ← .....
S ← .....
Tant que S <
    n ← .....
    u ← .....
    S ← .....
Fin Tant que
Afficher .....

```

30 ** [RAI, COM]

Un élève affirme : « Si u_n augmente, alors la somme $S_n = u_0 + \dots + u_n$ augmente aussi. »

1. Cette affirmation est-elle vraie si tous les termes sont positifs ?
2. Peut-elle être fausse si certains termes sont négatifs ?
3. Donner un exemple.

D — Problèmes et synthèse

31 *** [MOD, CAL]

Un théâtre construit une tribune. Le premier rang contient 24 places, le deuxième 28, le troisième 32, et ainsi de suite.

1. Modéliser le nombre de places au rang n , avec $n \geq 1$.
2. Calculer le nombre de places au rang 35.
3. Calculer le nombre total de places dans les 35 premiers rangs.
4. Interpréter le résultat par une phrase.

32 *** [MOD, CAL, COM]

Une chaîne de messages est lancée. Le jour 0, 12 personnes reçoivent le message. Chaque jour, le nombre de nouvelles personnes touchées est multiplié par 1,8.

1. Modéliser le nombre de nouvelles personnes touchées le jour n .
2. Estimer le nombre total de personnes touchées du jour 0 au jour 7.
3. Le modèle est-il réaliste à long terme ? Justifier.

33 *** [MOD, RAI]

Une entreprise compare deux primes.

Prime A	200 € le premier mois, puis 30 € de plus chaque mois
Prime B	200 € le premier mois, puis augmentation de 8 % chaque mois

1. Modéliser chaque prime mensuelle par une suite.
2. Calculer le montant total reçu sur 12 mois avec chaque prime.
3. Quelle prime est la plus avantageuse sur un an ?
4. Pourquoi la réponse pourrait-elle changer sur une durée plus longue ?

34 *** [CH, MOD, RAI]

Une personne économise pour acheter un vélo coûtant 850 euros. Elle dépose 40 euros le premier mois, puis augmente son dépôt de 5 euros chaque mois.

1. Modéliser le dépôt du mois n , avec $u_0 = 40$.
2. Écrire la somme qui représente l'argent total économisé au bout de $n + 1$ mois.
3. Déterminer au bout de combien de mois elle pourra acheter le vélo.
4. Vérifier la réponse par un tableau ou un raisonnement.

35 *** [CH, MOD, RAI]

Un lac contient une espèce invasive. On estime que la surface couverte est de 15 m² au départ et qu'elle augmente de 35 % chaque semaine. On note u_n la surface nouvellement couverte la semaine n , avec $u_0 = 15$.

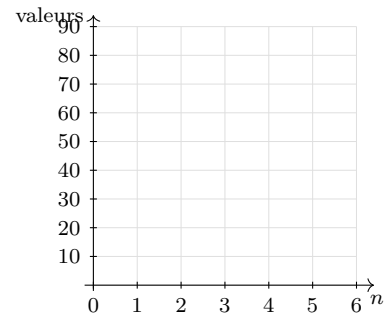
1. Donner l'expression de u_n .
2. Calculer la surface nouvellement couverte la semaine 6.
3. Calculer la surface totale couverte au bout de 7 semaines, en supposant que les surfaces s'ajoutent sans recouvrement.
4. Discuter la limite du modèle.

36 *** [CH, REP, COM]

On veut représenter graphiquement les termes $u_n = 10 + 5n$ et les cumuls $S_n = u_0 + \dots + u_n$ pour $0 \leq n \leq 5$.

1. Compléter le tableau.
2. Placer dans le repère les points $(n; u_n)$ et $(n; S_n)$ avec deux couleurs.
3. Expliquer pourquoi les deux nuages de points n'ont pas la même allure.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
S_n						



37 *** [COM]

Bilan de méthode. Rédiger en cinq lignes maximum une fiche expliquant comment choisir entre :

terme isolé et somme de termes.

Faire apparaître les mots : rang, cumul, arithmétique, géométrie, seuil.