

Objectif. Utiliser le signe de la dérivée pour prouver les variations d'une fonction, repérer des extremums et résoudre des problèmes d'optimisation. **Méthode attendue.** Domaine $\rightarrow$ dérivée $\rightarrow$ signe de la dérivée $\rightarrow$ tableau de variations $\rightarrow$ conclusion rédigée.

A — Réactivation

① ★ [CAL]

Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des expressions suivantes.

$$A(x) = 4x - 12, \quad B(x) = -3x + 15, \quad C(x) = 7 - 2x.$$

Présenter chaque réponse sous forme de tableau de signes.

② ★ [CAL]

Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des trinômes suivants.

$$P(x) = x^2 - 5x + 6, \quad Q(x) = -2x^2 + 8x - 8, \quad R(x) = x^2 + 2x + 5.$$

③ ★ [CAL]

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, définies sur leur domaine.

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1, \quad g(x) = x^3 - 4x, \quad h(x) = \frac{2x+1}{x-3}.$$

④ ★ [REP]

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-4; 6]$.

x	-4	-1	3	6
f	2	5	-2	1

Indiquer les intervalles sur lesquels f est croissante, puis décroissante.

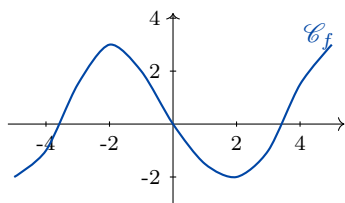
⑤ ★ [RAI]

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier brièvement.

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(a) = 0$, alors f admet forcément un extremum local en a .
- Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

⑥ ★ [REP]

La courbe ci-dessous représente une fonction f . Lire graphiquement le signe probable de $f'(x)$ sur chacun des intervalles visibles.



⑦ ★ [REP, CAL]

On sait que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -3x + 7$. Déterminer $f'(2)$ et $f(2)$.

⑧ ★ [COM]

Recopier les étapes dans le bon ordre pour étudier les variations d'une fonction dérivable f .

- Conclure sur les variations.
- Déterminer le signe de $f'(x)$.
- Calculer $f'(x)$.
- Préciser le domaine d'étude.
- Dresser un tableau de variations.

B — Applications directes

⑨ ★ [CAL, REP]

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- Calculer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Préciser l'extremum de f .

⑩ ★ [CAL, REP]

Même travail avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 + 8x - 1$.

⑪ ★★ [CAL, RAI]

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

- Montrer que $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$.
- En déduire les variations de f .
- Déterminer les extremums locaux de f .

⑫ ★★ [CAL, RAI]

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.

- Calculer $g'(x)$ et factoriser.
- Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g admet-elle un minimum local ? un maximum local ?

⑬ ★★ [CAL, REP]

Soit h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $h(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

- Justifier que h est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 3[$ et $] 3; +\infty[$.
- Calculer $h'(x)$.
- Étudier le signe de $h'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de h sur son domaine.

⑭ ★★ [CAL, MOD]

On considère la fonction A définie sur $]0; +\infty[$ par $A(x) = x + \frac{16}{x}$.

- Calculer $A'(x)$.
- Montrer que $A'(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2}$.
- Étudier les variations de A sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer la valeur minimale de $A(x)$.

⑮ ★ [REP, RAI]

On donne le tableau de signes de f' .

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

Compléter la ligne des variations de f et préciser la nature des extremums locaux éventuels.

16 ★ [REP, RAI]

Une fonction g est dérivable sur $[-5; 7]$ et vérifie :

$$g' < 0 \text{ sur } [-5; -1[, \quad g'(-1) = 0, \quad g' > 0 \text{ sur }]-1; 7].$$

De plus $g(-5) = 4$, $g(-1) = -3$ et $g(7) = 2$. Dresser le tableau de variations de g .

17 ★★ [CAL, RAI]

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x-3)$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Comparer $f(1)$ et $f(3)$.

18 ★★ [RAI, COM]

Soit f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 4]$.
2. En déduire le maximum et le minimum de f sur $[0; 4]$.
3. Rédiger une conclusion avec les mots « sur l'intervalle $[0; 4]$ ».

C — Approfondissement

19 ★★ [RAI, COM]

On considère $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$ sur $\mathbb{R}$. Deux élèves proposent deux méthodes.

Méthode 1 : utiliser la forme canonique. **Méthode 2 :** utiliser le signe de la dérivée.

Appliquer les deux méthodes, puis expliquer laquelle est la plus rapide ici.

20 ★★ [CAL, REP]

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur le domaine de f .
3. Dresser un tableau de variations en tenant compte de la valeur interdite.

21 ★★ [RAI]

On considère $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Étudier les variations de p sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $p(-1)$ et $p(1)$.
3. En déduire le signe de $p(x)$ sur $[-1; 1]$.
4. Que peut-on dire de l'inégalité $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ sur $[-1; 1]$?

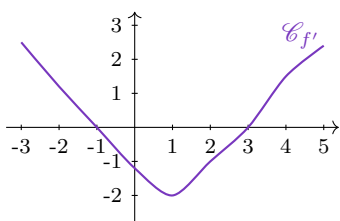
22 ★★ [RAI, COM]

Un élève écrit : « Comme $f'(0) = 0$, alors f admet un extremum local en 0. »

1. Tester cette affirmation avec la fonction $f(x) = x^3$.
2. Expliquer l'erreur.
3. Énoncer une condition suffisante permettant de conclure à un extremum local.

23 ★★ [REP]

La courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-3; 5]$.



1. Lire le signe de $f'(x)$.

2. En déduire les variations de f .

3. En quelles abscisses f peut-elle admettre un extremum local ?

24 ★★ [REP, COM]

On donne les informations suivantes :

$$f(-2) = 1, \quad f(1) = 5, \quad f(4) = -1,$$

et f' est positive sur $[-2; 1]$, négative sur $[1; 4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Tracer une allure possible de la courbe de f .
3. La courbe tracée est-elle unique ? Expliquer.

25 ★★★ [MOD, CAL]

Un rectangle a un périmètre de 40 cm. On note x sa largeur, avec $0 < x < 20$.

1. Exprimer sa longueur en fonction de x .
2. Montrer que son aire est $A(x) = 20x - x^2$.
3. Étudier les variations de A sur $]0; 20[$.
4. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.

26 ★★ [RAI, CAL]

Soit f définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

1. Étudier les variations de f sur $[-2; 3]$.
2. En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-2; 3]$.
3. Préciser où sont atteintes les bornes de cet encadrement.

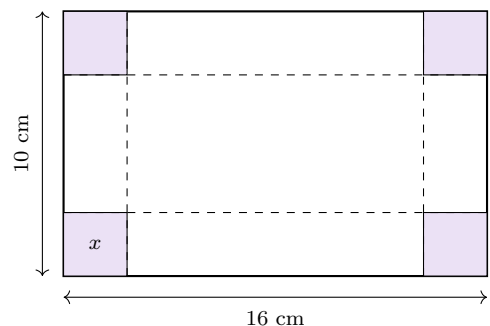
27 ★★★ [CH, RAI]

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$.

1. Calculer $f'(x)$ et factoriser.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f admet-elle un extremum local en 0 ? Justifier.
4. La fonction f admet-elle un extremum local en 3 ? Justifier.

28 ★★ [MOD, CAL]

Avec une feuille de carton rectangulaire de 16 cm sur 10 cm, on découpe un carré de côté x dans chaque coin, puis on relève les quatre bords pour former une boîte sans couvercle.

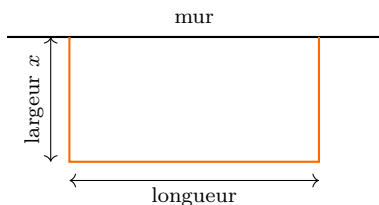


1. Exprimer, en fonction de x , les dimensions de la base de la boîte, puis son volume $V(x)$.
2. Préciser l'intervalle de définition de V .
3. Étudier les variations de V sur cet intervalle.
4. Déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal, puis ce volume maximal.

D — Problèmes et synthèse

29 ★★★ [MOD, RAI]

Un jardinier veut construire un enclos rectangulaire contre un mur. Il dispose de 30 m de grillage pour les trois côtés à clôturer.



On note x la largeur de l'enclos.

1. Exprimer la longueur en fonction de x .
2. Montrer que l'aire est $A(x) = 30x - 2x^2$ sur un intervalle à préciser.
3. Étudier les variations de A .
4. Déterminer les dimensions donnant l'aire maximale.

30 *** [MOD, CAL, COM]

Une entreprise fabrique entre 0 et 80 objets par jour. Le bénéfice, en euros, est modélisé par

$$B(x) = -0,05x^3 + 4x^2 + 20x - 100.$$

1. Calculer $B'(x)$.
2. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0; 80]$.
3. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ?
4. Rédiger une conclusion adaptée au contexte.

31 *** [CH, REP, COM]

On souhaite construire l'allure d'une courbe $\mathcal{C}_f$ sachant que :

$$f(-2) = 0, \quad f(0) = 3, \quad f(3) = -1, \quad f(5) = 2.$$

La fonction f est croissante sur $[-2; 0]$, décroissante sur $[0; 3]$, puis croissante sur $[3; 5]$.

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Tracer une allure possible de $\mathcal{C}_f$.
3. Placer les extremums locaux éventuels.
4. Donner une équation possible de la tangente en 0 si l'on sait que $f'(0) = 0$.

32 *** [RAI, COM]

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Étudier les variations de f .
2. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation $f(x) \leq 2$.
3. Expliquer en quoi le tableau de variations aide à contrôler les solutions trouvées.

33 *** [CH, MOD, RAI]

Un laboratoire étudie l'efficacité $E(t)$ d'un produit pendant les 6 premières heures suivant son injection. On modélise cette efficacité par

$$E(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t + 20, \quad t \in [0; 6].$$

1. Étudier les variations de E sur $[0; 6]$.
2. Déterminer l'efficacité maximale sur cette période.
3. À quel instant est-elle atteinte ?
4. Discuter la phrase : « Comme $E'(0) > 0$, l'efficacité augmente pendant toute la période. »

34 *** [COM]

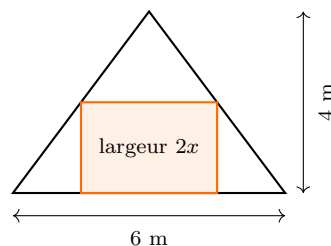
Bilan de méthode. Rédiger une fiche courte en quatre lignes maximum expliquant comment passer :

signe de f' $\longrightarrow$ variations de f $\longrightarrow$ extremums éventuels.

Ajouter une vigilance concernant la condition $f'(a) = 0$.

35 *** [MOD, RAI]

Le pignon d'un abri de jardin a la forme d'un triangle isocèle de base 6 m et de hauteur 4 m. On veut y découper une fenêtre rectangulaire, centrée, dont les deux sommets supérieurs touchent les côtés obliques du triangle.



On note x la demi-largeur de la fenêtre, avec $0 < x < 3$.

1. Montrer que la hauteur de la fenêtre est $h(x) = 4 - \frac{4}{3}x$.
2. En déduire que l'aire de la fenêtre est $A(x) = 8x - \frac{8}{3}x^2$.
3. Étudier les variations de A sur $]0; 3[$.
4. Déterminer les dimensions de la fenêtre d'aire maximale, puis cette aire.