

Objectif. Dériver des fonctions de référence, appliquer les règles de somme, produit, inverse, quotient et composée avec une fonction affine, puis choisir la règle adaptée.

Conseils. Avant de calculer, lire la structure de l'expression : somme, produit, quotient ou composée. Ne pas confondre l'image $f(x)$ et la pente $f'(x)$.

Repères. Les exercices de calcul doivent rester lisibles : identifier les fonctions u , v , leurs dérivées, puis conclure sur l'intervalle où l'expression a du sens.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

① ★ [CAL]

Dériver les fonctions de référence. a) $f(x) = 7$
c) $h(x) = x^2$

② ★ [CAL]

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité. a) $f(x) = x^5$ b) $g(x) = x^8$
c) $h(x) = x^{-2}$ d) $p(x) = x^{-4}$

③ ★ [CAL]

Donner l'ensemble de définition, puis l'ensemble de dérivabilité. a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x}$
c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$ d) $p(x) = \sqrt{x+3}$

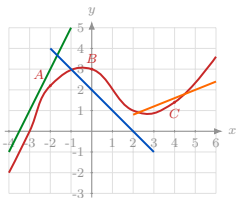
④ ★ [CAL]

Calculer.

- Si $f(x) = x^2$, calculer $f'(4)$.
- Si $g(x) = x^3$, calculer $g'(-2)$.
- Si $h(x) = \frac{1}{x}$, calculer $h'(5)$.
- Si $p(x) = \sqrt{x}$, calculer $p'(9)$.

⑤ ★ [REP, CAL]

Sur la figure, les droites tracées sont des tangentes à la courbe. Lire graphiquement les signes de $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(4)$.



⑥ ★ [RAI, COM]

Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

- Si $f'(a) > 0$, alors la tangente au point d'abscisse a monte.
- $f(x)$ et $f'(x)$ représentent toujours la même grandeur.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en 0.

⑦ ★ [CAL]

Compléter de mémoire.

Fonction	Dérivée
x^2	
x^3	
b) $g(x) = x$	$\frac{1}{x}$
d) $p(x) = x^3$	$\sqrt{x}$

B — Applications directes

⑧ ★ [CAL]

Dériver les fonctions polynomiales.

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
- $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7$
- $h(x) = -2x^5 + 3x^2 - x + 8$
- $p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 2x$

⑨ ★ [CAL]

Dériver sur l'intervalle où la fonction est dérivable.

- $f(x) = \frac{5}{x}$
- $g(x) = \frac{3}{x^2}$
- $h(x) = 4\sqrt{x}$
- $p(x) = 7x^{-3}$

⑩ ★★ [CAL, RAI]

- $f(x) = x^2(3x - 1)$
- $g(x) = (2x + 5)(x^2 - 1)$
- $h(x) = x^3(4 - x)$

⑪ ★★ [CAL, RAI]

Pour chaque fonction, dire s'il vaut mieux développer avant de dériver ou utiliser la formule du produit.

Puis dériver.

- $(x + 1)(x + 4)$
- $x^2(5x - 3)$
- $(2x - 1)(x^3 + 2)$
- $(x - 2)^2$

⑫ ★★ [CAL]

Dériver les quotients sur leur ensemble de dérivabilité.

- $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
- $g(x) = \frac{x+4}{x^2+1}$
- $h(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

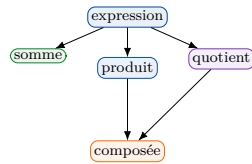
⑬ ★★ [CAL, RAI]

Dériver les fonctions composées avec une fonction affine.

- a) $f(x) = (3x - 1)^4$
 b) $g(x) = (5 - 2x)^3$
 c) $h(x) = \sqrt{4x + 1}$
 d) $p(x) = \frac{1}{2x - 3}$

14 ** [CH, REP]

Pour chaque expression, indiquer la structure principale : somme, produit, quotient ou composée.



15 ** [CAL, COM]

On donne $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Calculer $f'(x)$, puis donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

16 ** [CAL, COM]

On donne $g(x) = \frac{1}{x} + 2x$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $g'(x)$, puis $g'(1)$ et $g'(-2)$.

C — Entraînement approfondi

17 ** [RAI, COM]

Corriger les erreurs.

- $(uv)' = u'v'$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$.
- $((3x + 1)^5)' = 5(3x + 1)^4$.
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2x}$.

18 ** [CAL, RAI]

Dériver en choisissant une méthode efficace.

- a) $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$
 b) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$
 c) $h(x) = (2x - 5)^2 + x^3$
 d) $p(x) = \sqrt{3x + 7} + x^2$

19 ** [CAL, RAI]

Pour chaque fonction, préciser l'ensemble de dérivabilité,

- a) $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$
 puis dériver. b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$
 c) $h(x) = \sqrt{2x - 5}$

20 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Interpréter graphiquement les solutions obtenues.

21 ** [CAL, COM]

Soit $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

22 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = (4x - 3)^5$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer $f'(1)$.

3. Donner une approximation affine de $f(1,01)$.

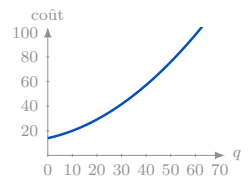
23 ** [MOD, CAL]

Le coût de production, en centaines d'euros, de q dizaines d'objets est $C(q) = 0,04q^3 - 0,6q^2 + 5q + 12$.

- Calculer $C'(q)$.
- Interpréter $C'(20)$ dans le contexte.

24 ** [MOD, REP, COM]

Le graphique représente un coût de production. Expliquer pourquoi la dérivée peut être interprétée comme un coût marginal instantané.



25 ** [CH, RAI]

Trouver une fonction polynomiale f de degré 2 telle que $f'(x) = 6x - 4$. Peut-on en trouver plusieurs ? Expliquer.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

26 *** [CH, CAL, RAI]

On cherche les points de la courbe de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ où la tangente est horizontale.

- Traduire la condition sur $f'(x)$.
- Déterminer les abscisses correspondantes.
- Donner les coordonnées des points.

27 *** [CH, CAL, COM]

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$. On cherche une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -4x + 1$.

- Quelle condition doit vérifier $f'(x)$?
- Déterminer les abscisses possibles.
- Rédiger une conclusion.

28 *** [CH, MOD, RAI]

Une entreprise modélise son bénéfice, en milliers d'euros, par $B(x) = -0,2x^3 + 3x^2 + 4x - 10$, où x est le nombre de centaines d'objets vendus.

- Calculer $B'(x)$.
- Calculer $B'(2)$ et $B'(8)$.
- Interpréter le signe de ces deux résultats.

29 *** [CH, RAI, COM]

On donne trois fonctions :

$$f(x) = x^2(2x - 1), \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \quad h(x) = \sqrt{5x - 2}.$$

Pour chacune, expliquer d'abord la règle de dérivation choisie, puis calculer la dérivée.

30 *** [CH, CAL, RAI]

Soit $f(x) = x + \frac{4}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$.
- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Que peut-on conjecturer pour la fonction f au voisinage de cette valeur ?

31 *** [CH, MOD, RAI]

On veut construire une fonction dont la dérivée est $f'(x) = 3(x - 2)^2$.

- Proposer une fonction possible.

2. Vérifier par dérivation.
3. Expliquer pourquoi cette fonction n'est pas unique.

32 *** [CH, COM]

Rédiger une synthèse courte : comment choisir la bonne règle de dérivation ? Donner un exemple pour une somme, un produit, un quotient et une composée.

© Vincent NICOLLE – CC BY-NC-SA 4.0