

TD N08 — Nombre dérivé, tangente et approximation locale

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Calculer un nombre dérivé, interpréter une tangente, déterminer une équation de tangente et utiliser une approximation affine locale.

Conseils. Toujours distinguer taux de variation moyen et nombre dérivé. Dans le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on garde $h \neq 0$, on simplifie, puis seulement ensuite on observe ce qui se passe lorsque h se rapproche de 0.

Repères. Les lectures graphiques se font sur la tangente : choisir deux points lisibles de cette droite, pas deux points quelconques de la courbe.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

1 ★ [CAL]

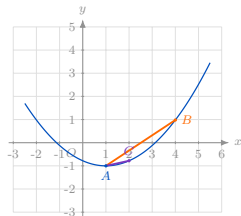
Calculer les images demandées. a) $f(x) = x^2$, $f(3)$, $f(3+h)$. b) $g(x) = 2x^2 - 1$, $g(1)$, $g(1+h)$. c) $u(x) = \frac{1}{x}$, $u(2)$, $u(2+h)$.

2 ★ [CAL]

Calculer et simplifier lorsque $h \neq 0$. a) $\frac{(2+h)^2 - 4}{h}$; b) $\frac{(1+h)^2 - 1}{h}$; c) $\frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

3 ★ [REP, CAL]

Sur la figure, déterminer le coefficient directeur de la sécante (AB), puis celui de la sécante (AC).



4 ★ [CAL, REP]

Compléter. Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est Si ce quotient se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0, ce nombre est noté

5 ★ [CAL]

Pour chaque quotient, indiquer le nombre vers lequel il se rapproche lorsque h se rapproche de 0. a) $3+h$; b) $-5+2h$; c) $4-h^2$; d) $1+\frac{h}{2}$.

6 ★ [MOD, CAL]

Une voiture parcourt 150 m entre les instants $t = 4$ s et $t = 10$ s. Calculer sa vitesse moyenne en m/s.

7 ★ [RAI, COM]

Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

- Un nombre dérivé est une pente locale.
- Une sécante et une tangente sont toujours la même droite.
- Dans $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on peut prendre $h = 0$ dès le début.

B — Applications directes

8 ★ [CAL]

Pour $f(x) = x^2$, calculer $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, avec $h \neq 0$. En déduire $f'(2)$.

9 ★ [CAL]

Pour $f(x) = x^2$, calculer $f'(3)$ avec la définition du nombre dérivé.

10 ★★ [CAL, RAI]

Pour $g(x) = 2x^2 - 5$, calculer $\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$, avec $h \neq 0$. En déduire $g'(-1)$.

11 ★★ [CAL, RAI]

Pour $u(x) = \frac{1}{x}$, calculer $\frac{u(2+h) - u(2)}{h}$, avec $h \neq 0$ et $h \neq -2$. En déduire $u'(2)$.

12 ★★ [RAI, COM]

On sait que, pour tout $h \neq 0$, $\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 7+2h$. La fonction f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, donner $f'(4)$.

13 ★★ [RAI, COM]

On sait que, pour tout $h \neq 0$, $\frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = -3+h^2$. Peut-on déterminer $g'(-2)$? Justifier.

14 ★★ [REP, CAL]

Sur le graphique, les droites tracées sont les tangentes à la courbe aux points A, B et C. Lire graphiquement $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(4)$.



15 ★ [CAL]

Une tangente passe par les points A(1;3) et B(4;9). Déterminer le nombre dérivé correspondant.

16 ★ [CAL, COM]

On sait que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -7$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

C — Entraînement approfondi

17 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculer $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, avec $h \neq 0$, puis en déduire $f'(1)$.

18 ** [CAL, RAI]

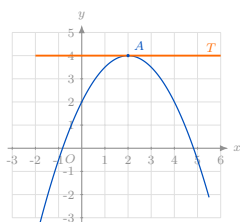
Soit $f(x) = x^3$. Calculer $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, avec $h \neq 0$, puis en déduire $f'(2)$.

19 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$. Pour $h > 0$, calculer $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$. Peut-on dire que f est dérivable en 0 ? Justifier.

20 ** [REP, RAI]

La droite T est tangente à la courbe au point A . Déterminer $f(2)$ et $f'(2)$, puis écrire une équation possible de T .



21 ** [CAL, COM]

On sait que $f(3) = 2$ et $f'(3) = -4$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

22 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

23 ** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Que remarque-t-on ?

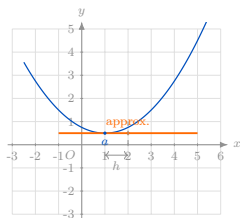
24 ** [RAI, COM]

Un élève écrit : « $f'(a) = 0$, donc la fonction est constante. » Expliquer pourquoi cette phrase est insuffisante. Proposer une formulation correcte.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

25 *** [REP, MOD, RAI]

Approximation locale. On remplace localement la courbe par sa tangente au voisinage de a . Expliquer graphiquement pourquoi $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.



26 *** [CAL, RAI]

On sait que $f(5) = 10$ et $f'(5) = 3$. Utiliser l'approximation affine locale pour estimer $f(5,02)$, puis $f(4,98)$.

27 *** [CAL, RAI]

Soit $f(x) = x^2$. Utiliser la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 pour donner une approximation de $10,1^2$. Comparer avec la valeur exacte.

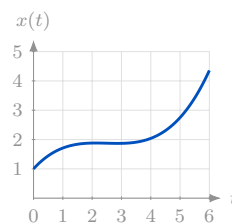
28 *** [MOD, CAL, COM]

Le déplacement d'un mobile sur un axe est modélisé par $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, pour $0 \leq t \leq 6$, où t est en secondes et $x(t)$ en centimètres.

1. Calculer la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 6$.
2. En étudiant la limite du taux de variation de x entre 4 et $4+h$ quand h tend vers 0, déterminer la vitesse instantanée $v(4)$.
3. En procédant de la même façon en $t = 3$, montrer que le mobile s'arrête à cet instant.

29 *** [MOD, REP, RAI]

Le graphique représente la position d'un mobile. Expliquer la différence entre vitesse moyenne sur $[0; 6]$ et vitesse instantanée en un instant donné.



30 *** [CH, RAI, COM]

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. On cherche les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$.

1. Traduire la condition sur le nombre dérivé.
2. Déterminer les abscisses possibles.
3. Donner les points correspondants.

31 *** [CH, MOD, RAI]

Soit $f(x) = x^2 + 5x - 4$. On cherche les tangentes à la courbe de f passant par le point $P(1; -7)$.

1. Écrire l'équation de la tangente au point d'abscisse a .
2. Traduire le fait que cette tangente passe par P .
3. Déterminer les valeurs possibles de a .

32 *** [CH, COM]

Rédiger une courte synthèse : expliquer la différence entre taux de variation, nombre dérivé, tangente et approximation affine locale. Utiliser au moins une formule et une interprétation graphique.