

# TD N07 — Taux de variation, pente et sécantes

Première générale — Spécialité mathématiques

**Objectif.** Calculer et interpréter un taux de variation, le relier à la pente d'une sécante, comparer des intervalles et observer ce qui se passe quand on rapproche les deux points.

**Conseils.** Toujours écrire le quotient dans le même ordre :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Une pente moyenne ne décrit pas forcément tout le trajet entre deux points.

**Repères.** Les graphiques servent à lire, conjecturer ou interpréter; dès qu'une expression est donnée, vérifier les lectures par un calcul.

## A — Réactivation et automatismes contextualisés

① ★[CAL] Calculer les images demandées.

1.  $f(x) = 2x + 1$ , calculer  $f(3)$ .
2.  $g(x) = x^2 - 4$ , calculer  $g(-2)$ .
3.  $h(x) = 5 - 3x$ , calculer  $h(4)$ .
4.  $p(x) = x^2 + x$ , calculer  $p(2)$ .

② ★[CAL] Calculer chaque différence :  $5 - 2$ ,  $1 - 4$ ,  $-3 - 2$ ,  $2 - (-1)$ .

③ ★[CAL, REP] On donne le tableau :

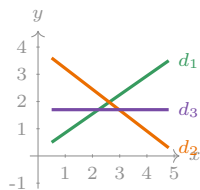
| $x$    | 0 | 1 | 3 | 4 |
|--------|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 5 | 9 | 6 |

Calculer  $f(3) - f(1)$ ,  $3 - 1$ , puis le quotient  $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ .

④ ★[REP, COM] Compléter.

1. Entre  $a$  et  $b$ , l'accroissement de la variable est ...
2. L'accroissement de l'image est ...
3. Le taux de variation est le quotient ...

⑤ ★[REP] Sur chaque droite, dire si la pente est positive, négative ou nulle.



⑥ ★[MOD, CAL] Une distance passe de 12 km à 30 km entre 9 h et 12 h. Calculer la vitesse moyenne et préciser son unité.

⑦ ★[RAI, COM] Vrai ou faux ? Justifier brièvement.

1. Un taux de variation est toujours positif.
2. Si  $f(a) = f(b)$ , alors le taux de variation entre  $a$  et  $b$  est nul.
3. Un taux de variation est une image de la fonction.

## B — Applications directes

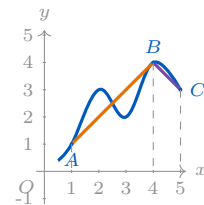
⑧ ★[CAL] Calculer le taux de variation de  $f$ .

1.  $f(x) = 3x - 2$ , entre 1 et 5.
2.  $f(x) = x^2$ , entre 2 et 4.
3.  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ , entre 0 et 3.
4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entre 1 et 4.

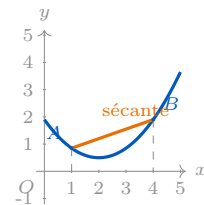
⑨ ★[CAL, COM] Pour  $f(x) = 2x + 5$ , calculer le taux de variation entre 0 et 3, puis entre  $-2$  et 4. Que remarque-t-on ?

⑩ ★★[CAL, RAI] Pour  $g(x) = x^2$ , calculer le taux de variation entre 0 et 1, puis entre 2 et 3. Expliquer pourquoi les deux résultats sont différents.

⑪ ★★[REP, CAL] Sur le graphique, lire les coordonnées des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Calculer la pente moyenne entre  $A$  et  $B$ , puis entre  $B$  et  $C$ .



⑫ ★★[REP, CAL] La sécante représentée passe par deux points de la courbe. Lire leurs coordonnées approximatives, puis calculer le coefficient directeur de la sécante.



⑬ ★★[CAL, REP] On donne le tableau suivant.

| $x$    | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------|----|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4  | 1 | 0 | 1 | 4 |

Calculer les taux de variation entre deux abscisses consécutives.

⑭ ★★[MOD, CAL] Une entreprise produit  $q$  objets. Son coût total, en euros, est  $C(q) = 0,5q^2 + 4q + 20$ . Calculer l'accroissement moyen du coût entre  $q = 10$  et  $q = 20$ . Interpréter le résultat.

⑮ ★★[REP, COM] Pour chaque situation, dire ce que représente le taux de variation.

1. Distance en fonction du temps.
2. Coût total en fonction du nombre d'objets.
3. Température en fonction de l'heure.

⑯ ★★[CAL, RAI] Soit  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ . Calculer le taux de variation entre 0 et 2, entre 2 et 4, puis entre 0 et 4. Comment interpréter le troisième résultat ?

## C — Approfondir, choisir, corriger

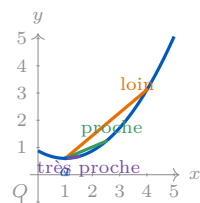
**17** \*\*[CAL, RAI] Pour  $f(x) = x^2$ , calculer le taux de variation entre  $a$  et  $b$ , puis simplifier.

1.  $a = 1, b = 1 + h$ .
2.  $a = 2, b = 2 + h$ .
3.  $a = -1, b = -1 + h$ .

On suppose  $h \neq 0$ .

**18** \*\*[CAL] Soit  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . Calculer et simplifier  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ , avec  $h \neq 0$ .

**19** \*\*[REP, RAI] Sur la figure, les trois sécantes partent du même point. Classer leurs pentes de la plus petite à la plus grande, puis expliquer ce que signifie « rapprocher le deuxième point ».



**20** \*\*[RAI, COM] Un élève écrit : « le taux entre 1 et 4 est positif, donc la fonction est croissante sur  $[1; 4]$ . » Expliquer pourquoi cette conclusion est trop rapide.

**21** \*\*[RAI, COM] Corriger les phrases.

1. « Le taux de variation est  $f(b) - f(a)$ . »
2. « La sécante est la courbe entre  $A$  et  $B$ . »
3. « Si la pente est négative, alors toutes les images sont négatives. »
4. « Dans  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , on peut prendre  $h = 0$ . »

**22** \*\*[CAL, REP] On donne deux points  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$ . Calculer le taux correspondant.

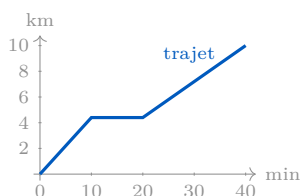
1.  $A(1; 3), B(5; 11)$ .
2.  $A(-2; 4), B(2; -4)$ .
3.  $A(0; 7), B(3; 7)$ .
4.  $A(4; -1), B(1; 5)$ .

**23** \*\*\*[CH, RAI] Trouver une fonction affine et une fonction non affine qui ont toutes les deux un taux de variation égal à 2 entre 0 et 3. Expliquer pourquoi cela ne signifie pas qu'elles ont le même comportement entre 0 et 3.

**24** \*\*[RAI, COM] On sait que le taux de variation d'une fonction  $f$  entre 1 et 5 vaut  $-2$ . Que peut-on dire de l'évolution moyenne? Peut-on connaître  $f(1)$  et  $f(5)$  séparément? Donner un exemple possible.

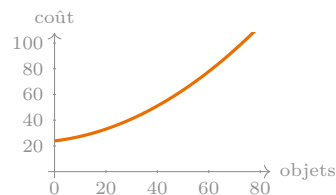
### D — Synthèse, problèmes et prise d'initiative

**25** \*\*\*[MOD, REP, RAI] Le graphique représente la distance parcourue par un cycliste en fonction du temps.



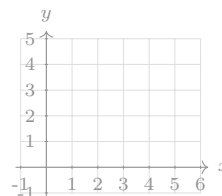
Calculer les vitesses moyennes entre 0 et 10 min, entre 10 et 20 min, puis entre 20 et 40 min. Décrire le trajet.

**26** \*\*\*[MOD, CAL, COM] Le coût total de fabrication de  $x$  objets est donné par  $C(x) = 0,02x^2 + 3x + 50$ , pour  $0 \leq x \leq 100$ .

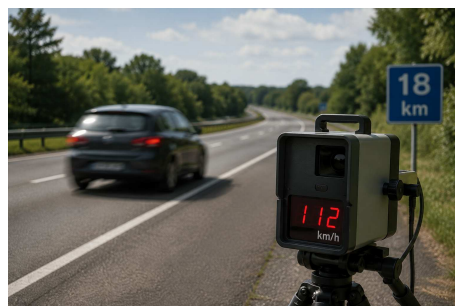


Calculer le taux de variation de  $C$  entre 20 et 40, puis entre 60 et 80. Comparer et interpréter.

**27** \*\*\*[CH, REP, RAI] Tracer dans le repère une courbe possible d'une fonction  $f$  telle que le taux de variation entre 0 et 2 soit positif, entre 2 et 4 soit négatif, et entre 0 et 4 soit nul.



**28** \*\*\*[MOD, RAI, COM] Un radar tronçon mesure qu'une voiture a parcouru 18 km en 12 minutes.



Calculer sa vitesse moyenne en km/h. Peut-on affirmer que la voiture a roulé exactement à cette vitesse pendant tout le trajet?

**29** \*\*\*[CH, CAL, RAI] Pour  $f(x) = x^2$ , on veut approcher la pente « au voisinage de 2 ». Calculer les taux entre 2 et 3, entre 2 et 2,1, puis entre 2 et 2,01. Que semblent indiquer ces valeurs?

**30** \*\*\*[CH, MOD, COM] Inventer une situation concrète dans laquelle un taux de variation a une unité. Donner deux valeurs, calculer le taux, puis interpréter le résultat.

**31** \*\*\*[CH, COM] Rédiger une courte synthèse : expliquer la différence entre accroissement, taux de variation, pente d'une sécante et information instantanée.

**32** \*\*\*[CH, RAI, COM] Dire si chaque affirmation est vraie, fausse ou insuffisamment précise. Justifier.

1. Deux fonctions qui ont le même taux de variation entre 0 et 3 sont égales sur  $[0; 3]$ .
2. Une pente de sécante positive suffit à prouver qu'une fonction est croissante sur tout l'intervalle.
3. Pour une fonction affine, le taux de variation est constant.
4. Un taux de variation peut avoir une unité.