

TD N06 (partie 2) — Second degré : inéquations, optimisation et problèmes

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Résoudre des inéquations du second degré, comparer des fonctions, choisir la forme adaptée, optimiser une grandeur sur un domaine et conduire une modélisation jusqu'à une conclusion interprétée.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 5, 9 à 12, 17 à 21, 25 **Maison :** 6 à 8, 13 à 16, 22 à 24, 28 **Approfondir :** 26, 27, 29 à 33

Rédaction attendue. Toute inéquation est résolue par équivalences, avec un tableau de signes réalisé avec tkz-tab, puis une conclusion $\mathcal{S} = \dots$. Dans un problème : variable, domaine, modèle, calcul, contrôle et phrase de réponse.

A — Inéquations et tableaux de signes

①★[CAL]

Résoudre en utilisant directement la forme factorisée.

- a) $(x-3)(x+2) \leq 0$ b) $-2(x+1)(x-5) > 0$
c) $x(4-x) \geq 0$ d) $3(x-2)^2 < 0$

②★[CAL]

Factoriser, puis résoudre.

- a) $x^2 - 7x \geq 0$ b) $4x^2 - 25 < 0$
c) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ d) $-x^2 + 9 > 0$

③★[CAL, COM]

Résoudre à l'aide du discriminant. Rédiger un cas de façon détaillée.

- a) $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$ b) $3x^2 + 2x - 1 > 0$
c) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ d) $x^2 + 2x + 5 < 0$

④★★[RAI]

On pose $P(x) = -2(x+4)(x-1)$. Sans refaire quatre tableaux, résoudre :

$$P(x) > 0, \quad P(x) \geq 0, \quad P(x) < 0, \quad P(x) \leq 0.$$

Comparer soigneusement les crochets.

⑤★[REP, RAI]

Le tableau ci-dessous est celui d'un trinôme P .

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

- Donner le signe du coefficient dominant.
- Résoudre $P(x) \geq 0$, puis $P(x) < 0$.
- Donner les racines et le signe de Δ .

⑥★★[RAI, COM]

Corriger chaque copie.

- $x(x-4) \leq 0$, donc $\mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$.
- $(x-2)^2 > 0$, donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours positif.
- Les solutions de $P(x) \geq 0$ sont toujours à l'extérieur des racines.

⑦★[CAL, RAI]

Résoudre dans le domaine indiqué.

- $(x-1)(x-6) \leq 0$ avec $x \in [0; 4]$.
- $-x^2 + 10x - 16 > 0$ avec $x \in [0; 10]$.
- $x(12-x) \geq 27$ avec $x \in [0; 12]$.

⑧★★★[CH, RAI]

Déterminer tous les réels m tels que

$$x^2 + (m-2)x + m \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Justifier le rôle du coefficient dominant et du discriminant.

B — Comparer des fonctions et des courbes

⑨★[CAL]

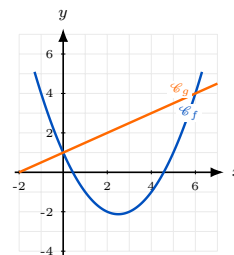
Soient $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x + 3$.

- Résoudre $f(x) = g(x)$.
- Résoudre $f(x) \leq g(x)$.
- Traduire les réponses en termes de courbes.

⑩★[REP, RAI]

À partir du graphique :

- estimer les abscisses d'intersection ;
- donner l'intervalle où $\mathcal{C}_f$ est sous $\mathcal{C}_g$;
- prévoir le signe de $f - g$.



⑪★★[CAL, REP]

Le graphique de l'exercice 10 représente

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Retrouver exactement les intersections et la position relative des courbes. Comparer avec les lectures graphiques.

12 ★ [CAL, RAI]

Déterminer les positions relatives de la parabole de $f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ et de l'axe des abscisses. Expliquer pourquoi cette question est une étude de signe.

13 ★★ [MOD, CAL]

Deux offres de location sont modélisées, pour $x \in [0; 12]$, par

$$A(x) = 2x^2 + 15, \quad B(x) = 9x + 8,$$

en euros.

1. Pour quelles durées les deux offres coûtent-elles le même prix ?
2. Quand l'offre A est-elle la moins chère ?
3. Interpréter les bornes dans le contexte.

14 ★★ [CAL, RAI]

Résoudre en choisissant une transformation adaptée.

a) $(x-3)^2 \leq 16$, b) $2(x+1)^2 - 8 > 0$, c) $(2x-5)^2 \geq 9$. Comparer la méthode par identité remarquable avec celle par discriminant.

15 ★★ [MOD, CAL, RAI]

Deux itinéraires sont chronométrés, en minutes, par

$$d_1(x) = x^2 - 3x + 5, \quad d_2(x) = 2x + 1,$$

où $x \geq 0$ est la distance parcourue en kilomètres.

1. Résoudre $d_1(x) > d_2(x)$.
2. En déduire à partir de quelle distance le second itinéraire devient le plus rapide.
3. Comparer les deux itinéraires pour de très courtes distances.

16 ★★★ [CH, RAI, COM]

Construire deux fonctions f et g , l'une affine et l'autre du second degré, telles que :

$$f(x) \leq g(x) \iff x \in [-2; 4].$$

Donner leurs expressions et justifier. Plusieurs réponses sont possibles.

C — Extremums et optimisation

17 ★ [CAL]

Donner l'extremum et l'abscisse où il est atteint.

- a) $2(x-3)^2 - 5$ b) $-4(x+1)^2 + 9$
c) $x^2 - 8x + 7$ d) $-2x^2 + 12x - 11$

18 ★ [REP, RAI]

Le tableau de variations d'une fonction du second degré est donné.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	18	$-\infty$

1. Donner le sommet et le signe du coefficient dominant.
2. Proposer une forme canonique possible.
3. Résoudre $f(x) \leq 18$.

19 ★★ [CAL, RAI]

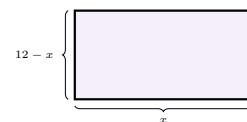
Pour $f(x) = 2(x-5)^2 - 8$, déterminer :

1. le minimum sur $\mathbb{R}$;
2. le minimum et le maximum sur $[1; 7]$;
3. le minimum et le maximum sur $[6; 10]$.

Construire les tableaux de variations utiles avec tkz-tab.

20 ★★ [MOD, CAL]

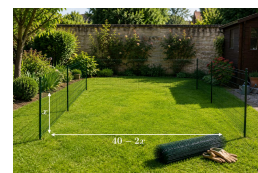
Un rectangle a un demi-périmètre de 12 cm. On note x l'un de ses côtés.



1. Déterminer le domaine de x .
2. Exprimer l'aire $A(x)$.
3. Déterminer l'aire maximale et les dimensions correspondantes.

21 ★★ [MOD, CAL, RAI]

On dispose de 40 m de grillage pour un enclos adossé à un mur.



1. Établir $A(x) = x(40 - 2x)$.
2. Déterminer l'enclos d'aire maximale.
3. Résoudre $A(x) \geq 150$.

22 ★★ [MOD, CAL]

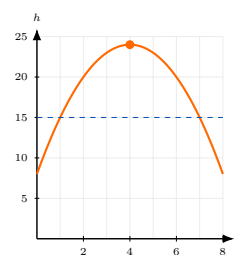
Le prix unitaire d'un article est p euros. La demande prévue est $q(p) = 120 - 4p$, avec $0 \leq p \leq 30$.

1. Exprimer la recette $R(p)$.
2. Déterminer le prix qui maximise la recette.
3. Donner la demande et la recette correspondantes.

23 ★★ [MOD, REP, CAL]

La hauteur d'un projectile est

$$h(t) = -(t-4)^2 + 24.$$



On étudie le mouvement pour $t \in [0; 8]$.

1. Donner la hauteur maximale.
2. Quand la hauteur est-elle au moins égale à 15 m ?
3. Interpréter les deux bornes obtenues.

24 ★★★ [CH, CAL, RAI]

Deux nombres positifs ont pour somme 10. On note x le premier.

1. Exprimer le produit $P(x)$ et le domaine de x .
2. Déterminer le produit maximal.
3. Démontrer ainsi que, pour $a, b \geq 0$,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

25 ** [MOD, CAL, COM]

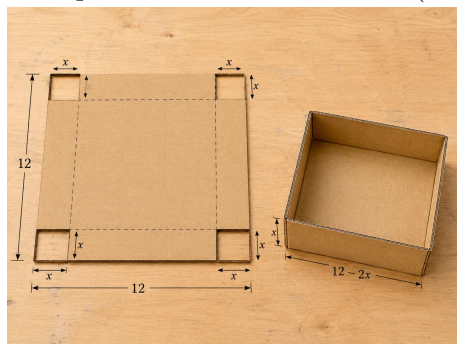
Le bénéfice B , en milliers d'euros, d'une production de x centaines d'objets est

$$B(x) = -x^2 + 12x - 20, \quad x \in [0; 15].$$

1. Déterminer les seuils de rentabilité.
2. Pour quelles productions l'entreprise est-elle bénéficiaire ?
3. Déterminer le bénéfice maximal.
4. Rédiger un bilan destiné au responsable de production.

26 *** [MOD, RAI]

On fabrique une boîte sans couvercle en découpant des carrés de côté x aux coins d'une plaque carrée de côté 12. On admet que l'aire de la base vaut : $(12 - 2x)^2$



1. Préciser le domaine de x .
2. Chercher pour quelles valeurs de x l'aire de la base est au moins égale à 64.
3. Interpréter la solution dans le contexte.

27 *** [MOD, CAL, COM]

Un projectile est lancé verticalement. Sa hauteur, en mètres, est

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1, \quad t \geq 0.$$

1. À quel instant la hauteur est-elle maximale ?
2. Quelle est cette hauteur maximale ?
3. Pendant combien de temps le projectile est-il à au moins 16 m ?

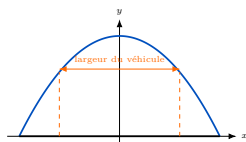
D — Problèmes, paramètres et synthèse

28 *** [MOD, CAL, RAI]

Une arche est modélisée par

$$f(x) = 5 - \frac{x^2}{5}, \quad x \in [-5; 5].$$

Un véhicule de 6 m de large et 3 m de haut peut-il passer en restant centré ? Justifier par une inéquation, puis proposer la hauteur maximale d'un véhicule de même largeur.



29 *** [CH, RAI]

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère

$$P_m(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3.$$

1. Pour quelles valeurs de m , $P_m(x) > 0$ pour tout réel x ?
2. Pour quelles valeurs existe-t-il un unique réel x tel que $P_m(x) = 0$?
3. Interpréter graphiquement les trois régimes obtenus.

30 *** [CH, CAL]

Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles l'inéquation

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 7 \geq 0$$

est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ne pas oublier le cas où le coefficient de x^2 s'annule.

31 *** [MOD, CAL]

On veut approcher le maximum de

$$f(x) = -2x^2 + 7x + 3$$

sur $[0; 5]$.

1. Compléter le tableau de valeurs de f pour $x = 0, 0,5, 1, \dots, 5$ (pas de 0,5), et en déduire un encadrement du maximum.
2. Donner la valeur exacte du maximum par la forme canonique.
3. Comparer l'encadrement obtenu et la valeur exacte.

32 *** [RAI, COM]

Soient u et v deux réels de somme s .

1. Écrire $v = s - u$, puis le produit uv en fonction de u .
2. Mettre ce produit sous forme canonique.
3. Démontrer que le produit est maximal lorsque $u = v$.
4. Préciser ce qui change si l'on impose $u, v \geq 0$.

33 *** [CH, MOD, RAI, COM]

Une association souhaite aménager une zone rectangulaire de 300 m² le long d'un bâtiment. Seuls les trois autres côtés sont clôturés.

1. Si x est la profondeur, exprimer la longueur de clôture $L(x)$. Ce modèle est-il du second degré ?
2. On impose finalement une longueur totale de clôture de 50 m. Montrer que l'aire devient une fonction du second degré.
3. Déterminer l'aire maximale avec cette contrainte.
4. L'objectif de 300 m² est-il atteignable ? Si oui, donner toutes les dimensions possibles.
5. Comparer les deux questions et expliquer pourquoi le choix de la contrainte change la nature du modèle.