

TD N06 (partie 1) — Second degré : formes, racines, signe et discriminant

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Choisir une écriture et une méthode adaptées, résoudre des équations du second degré, relier discriminant, racines, factorisation, signe et parabole, puis mobiliser ces outils dans des problèmes.

Parcours conseillé. Classe : 1 à 5, 9 à 12, 19 à 22, 27 Maison : 6 à 8, 13 à 18, 23 Approfondir : 24 à 26, 28 à 30

Réflexe attendu. Avant de calculer Δ , chercher une factorisation immédiate, une identité remarquable, une forme canonique simple ou une racine évidente. Toute résolution se termine par un ensemble de solutions.

A — Formes, racines et premières lectures

1 ★ [CAL]

Développer et réduire.

- a) $2(x+1)(x-3)$ b) $-3(x-2)^2$
c) $(2x-5)(x+1)$ d) $4(x+2)^2-9$

2 ★ [CAL, REP]

On considère

$$P(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8 = 2(x+1)(x-3).$$

Compléter le tableau.

Question	Forme choisie	Réponse
$P(0)$	...	...
sommet	...	...
racines	...	...
signe en 2	...	...

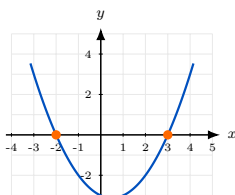
3 ★ [CAL]

Donner les racines, sans développer.

- a) $3(x-4)(x+2)$ b) $-5x(x-7)$
c) $(2x+1)(x-3)$ d) $4(x+5)^2$

4 ★ [REP, COM]

Lire graphiquement les racines de la fonction représentée. Donner ensuite les intervalles sur lesquels la fonction semble positive ou négative.



5 ★ [REP, RAI]

Indiquer la forme la plus adaptée, sans effectuer les calculs.

- Calculer $P(0)$.
- Lire le sommet.
- Résoudre $P(x) = 0$.

4. Déterminer le signe de $P(x)$.

5. Calculer le discriminant.

6 ★★ [CAL, RAI]

Soit $P(x) = -2(x+3)(x-1)$.

- Calculer $P(-4)$, $P(0)$, $P(2)$.
- Relier les signes obtenus à la position de -4 , 0 et 2 par rapport aux racines.
- Conjecturer le signe de P sur $\mathbb{R}$.

7 ★★ [REP, RAI]

Pour chacune des trois paraboles, donner le signe probable de Δ et le nombre de racines réelles. Expliquer le lien avec l'axe des abscisses.



8 ★★ [RAI, COM]

Corriger les affirmations fausses.

- Une racine de P est un nombre r tel que $P(r) = r$.
- Si $P(x) = 3(x-2)(x+5)$, alors les racines sont 2 et 5 .
- Tout trinôme possède une forme factorisée dans $\mathbb{R}$.
- Si une parabole coupe deux fois l'axe des abscisses, alors $\Delta > 0$.

B — Résoudre sans discriminant

9 ★ [CAL]

Résoudre en utilisant un facteur commun.

- a) $x^2 - 5x = 0$ b) $3x^2 + 12x = 0$
c) $2x^2 = 7x$ d) $5x^2 + 10x = 0$

10 ★ [CAL]

Résoudre à l'aide d'une identité remarquable.

- a) $x^2 - 49 = 0$ b) $4x^2 - 9 = 0$
c) $(x-3)^2 - 16 = 0$ d) $25 - (2x+1)^2 = 0$

11 ★ [CAL, RAI]

Résoudre en exploitant la forme canonique.

- a) $(x-2)^2 - 5 = 0$ b) $2(x+1)^2 - 8 = 0$
c) $-3(x-4)^2 + 12 = 0$ d) $(x+5)^2 + 3 = 0$

12 ** [CAL, RAI]

Trouver une racine évidente, puis l'autre racine à l'aide de la somme ou du produit.

- a) $x^2 - 5x + 4$ b) $2x^2 - x - 6$
c) $3x^2 + 5x + 2$ d) $5x^2 - 13x - 6$

13 ** [CAL]

Déterminer deux nombres réels dont :

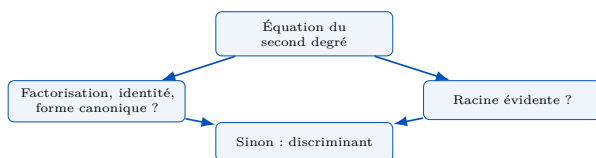
- la somme vaut 7 et le produit 10 ;
- la somme vaut -1 et le produit -6 ;
- la somme vaut 6 et le produit 9.

Associer chaque question à un trinôme de la forme $X^2 - sX + p$.

14 ** [RAI]

Pour chaque équation, indiquer seulement la méthode la plus efficace : facteur commun, identité remarquable, forme canonique, racine évidente ou discriminant.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x &= 0 \\ (x - 4)^2 &= 7 \\ x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ 3x^2 + x + 7 &= 0 \end{aligned}$$



15 ** [CAL, RAI]

Résoudre par la méthode de votre choix et justifier ce choix.

- a) $6x^2 - 18x = 0$ b) $9x^2 - 24x + 16 = 0$
c) $x^2 + 2x - 15 = 0$ d) $2(x - 1)^2 = 11$

16 ** [CH, CAL]

Construire une fonction polynôme du second degré :

- ayant pour racines -2 et 5 ;
- ayant pour racine double 3 ;
- ayant les mêmes racines que la première et vérifiant $f(0) = 20$.

17 ** [RAI, COM]

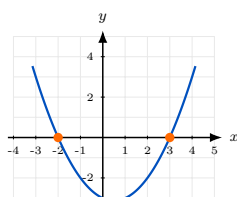
On suppose $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Développer cette expression et démontrer :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

18 ** [REP, CAL]

La courbe ci-contre représente $x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2)(x - 3)$.

- Résoudre graphiquement $P(x) = 0$.
- Retrouver les solutions algébriquement.
- Vérifier la somme et le produit des racines.



C — Discriminant, factorisation et signe

19 * [CAL]

Pour chaque trinôme, identifier a, b, c , puis calculer Δ .

- a) $x^2 - 6x + 5$ b) $2x^2 + 3x - 2$
c) $-3x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 + 4x + 5$

20 ** [CAL, COM]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en rédigeant les trois cas.

- a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
c) $3x^2 - 2x + 5 = 0$ d) $2x^2 + x - 6 = 0$

21 ** [CAL, RAI]

Factoriser dans $\mathbb{R}$, si possible.

- a) $x^2 + x - 12$ b) $2x^2 - 5x - 3$
c) $-x^2 + 6x - 9$ d) $3x^2 + 2x + 4$

22 ** [REP, CAL]

Compléter les tableaux de signes TikZ.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$2(x+1)(x-3)$	...	0	...	0

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-3(x-2)^2$	...	0	...

23 ** [CAL, RAI]

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$.

- a) $(x - 4)(x + 2)$ b) $-2(x + 1)(x - 5)$
c) $5(x - 3)^2$ d) $-x^2 - 2x - 5$

24 *** [CH, RAI]

On considère $P_m(x) = x^2 - 2mx + m + 3$.

- Calculer Δ_m .
- Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ possède-t-elle une racine double ?
- Pour quelles valeurs de m possède-t-elle deux racines distinctes ?

25 *** [REP, RAI]

Soit $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Montrer que $\Delta = -4a\beta$.
- Si $a > 0$, relier le signe de β au nombre de racines.
- Reprendre la question lorsque $a < 0$.

26 *** [CH, CAL]

Une parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 4 , et passe par $A(2; -12)$.

- Écrire la fonction sous forme factorisée avec un coefficient a .
- Déterminer a .
- Donner les trois formes du trinôme et les coordonnées du sommet.

D — Problèmes et synthèse

27 *** [CH, MOD, CAL]

Un menuisier doit fabriquer un cadre en bois rectangulaire. Le périmètre du cadre doit mesurer 26 cm et sa surface 40 cm². Existe-t-il un tel cadre ? Si oui, donner ses dimensions.

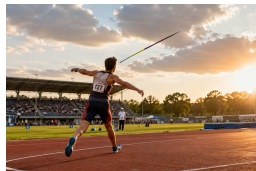


28 *** [CH, MOD, REP]

La hauteur d'un projectile (en mètres) est modélisée par

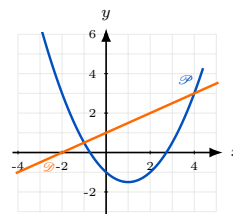
$$h(x) = -(x - 4)^2 + 16,$$

où x est le temps écoulé (en secondes). Quelle hauteur maximale atteint-il, et à quel instant retombe-t-il au sol ?



29 *** [CH, REP, CAL]

On considère la parabole de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ et la droite de $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$. Déterminer les points d'intersection entre la courbe de f et la droite de g (vous pourrez vous appuyer sur la figure).



30 *** [CH, RAI, COM]

Trouver tous les couples de réels $(x; y)$ tels que

$$x + y = 5 \quad \text{et} \quad xy = -14.$$

Vous conclurez en expliquant le lien entre ce système et les racines d'une équation du second degré.