

TD N05 — Second degré : fonction carré et forme canonique

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Comprendre les fonctions du second degré comme des transformations de la fonction carré, lire et exploiter la forme canonique, choisir la forme adaptée, puis résoudre des problèmes courts d'extremum sans utiliser le discriminant.

Conseils. Les représentations graphiques servent à raisonner : lire un sommet, un axe, un extremum, puis traduire ces informations en phrases mathématiques. Quand une forme canonique est donnée, commencer par identifier a , α et β .

A — Fonction carré et automatismes

① ★ [CAL]

Calculer sans calculatrice.

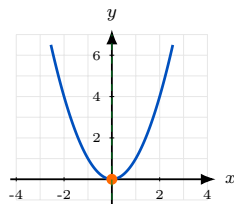
- a) $(-4)^2$ b) $3^2 - 5^2$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ d) -2^2
e) $(-2)^3$ f) $(1 - 5)^2$ g) $(3 - 7)^2$ h) $-(3 - 7)^2$

② ★ [CAL, REP]

Compléter le tableau de valeurs de la fonction carré, puis vérifier la symétrie des résultats.

x	-3	-2	-1	0
x^2	...	...	...	...

x	1	2	3
x^2	...	...	...



③ ★ [CAL]

Développer et réduire.

- a) $(x + 3)^2$ b) $(x - 5)^2$
c) $2(x - 1)^2$ d) $-(x + 4)^2$

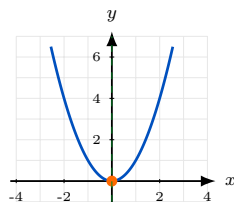
④ ★ [CAL, RAI]

Dans chaque cas, faire apparaître un carré.

- a) $x^2 + 6x = (x + \dots)^2 - \dots$
b) $x^2 - 8x = (x - \dots)^2 - \dots$
c) $x^2 + 2x + 7 = (x + \dots)^2 + \dots$

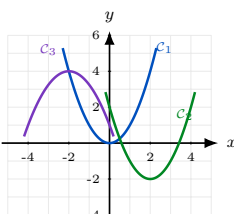
⑤ ★ [REP, CAL]

Sur le graphique de la fonction carré, lire les images de -2 , 0 , 2 , puis donner les antécédents de 4 .



⑥ ★★ [REP, RAI]

Les trois courbes sont des transformations de la fonction carré. Pour chacune, indiquer si le sommet est au-dessus, au-dessous, à gauche ou à droite de l'origine.



⑦ ★ [REP, COM]

Compléter le tableau de variations de la fonction carré.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	...	...	...

Rédiger ensuite une phrase contenant les mots : décroissante, croissante, minimum.

⑧ ★★ [RAI, COM]

On sait que $f(x) = x^2$. Expliquer sans calculer pourquoi $f(-7) = f(7)$, puis donner deux nombres différents qui ont la même image par f .

B — Lire et exploiter la forme canonique

⑨ ★ [REP, CAL]

Pour chaque fonction, donner a , α , β , le sommet et l'axe de symétrie.

- a) $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ b) $g(x) = 3(x + 1)^2 + 4$
c) $h(x) = -2(x - 5)^2 + 1$ d) $p(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 6$

⑩ ★ [REP, COM]

Pour les fonctions de l'exercice 9, indiquer si l'extremum est un maximum ou un minimum, puis donner sa valeur.

⑪ ★★ [REP, RAI]

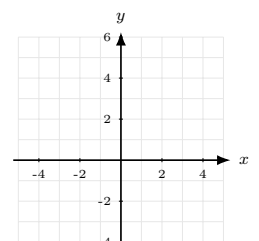
Compléter les tableaux de variations.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$(x - 2)^2 - 3$	...	...	...

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-2(x + 1)^2 + 4$	...	...	...

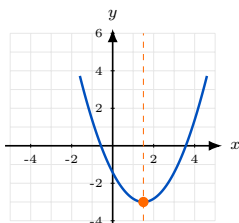
⑫ ★★ [REP]

Tracer dans le repère, avec une allure soignée, les paraboles de sommets $S_1(2; -2)$ et $S_2(-1; 3)$. La première est tournée vers le haut, la seconde vers le bas.



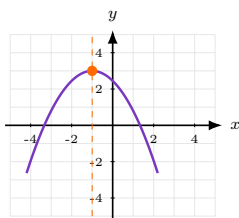
13 ** [REP, RAI]

Lire graphiquement le sommet, l'axe de symétrie, l'extremum et le sens de variation de la fonction représentée.



14 ** [REP, RAI]

Même consigne : lire le sommet, l'axe de symétrie, l'extremum et le sens de variation. Préciser le signe de a .



15 ** [CAL, RAI]

On considère $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.

1. Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$.
2. Expliquer pourquoi $f(0) = f(6)$ était prévisible.
3. Donner deux nombres ayant la même image que $x = 1$.

16 ** [RAI, COM]

Soit $g(x) = -(x + 2)^2 + 9$.

1. Donner le maximum de g et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
2. Résoudre mentalement $g(x) = 9$, puis conclure par $\mathcal{S} = \dots$
3. Résoudre $g(x) = 5$ en utilisant la forme canonique, puis conclure par $\mathcal{S} = \dots$

C — Choisir, corriger, transformer

17 ** [RAI, COM]

Corriger les affirmations fausses et expliquer l'erreur.

1. Pour $f(x) = (x + 4)^2 - 1$, le sommet est $S(4; -1)$.
2. Pour $g(x) = -3(x - 2)^2 + 5$, le maximum vaut -3 .
3. Pour $h(x) = 2(x + 1)^2 + 7$, l'axe de symétrie est $x = 1$.

18 ** [CAL, REP]

Ecrire sous forme canonique, puis donner le sommet.

- a) $x^2 + 6x + 2$ b) $x^2 - 10x + 7$
c) $x^2 + 4x - 1$ d) $x^2 - 2x + 8$

19 ** [CAL, RAI]

Ecrire sous forme canonique.

- a) $2x^2 - 8x + 3$ b) $-x^2 + 6x - 2$
c) $3x^2 + 12x + 5$ d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

20 ** [RAI, COM]

On considère

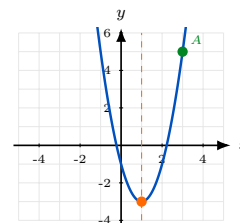
$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

Dire quelle forme est la plus adaptée pour :

1. calculer rapidement $f(0)$;
2. lire le minimum ;
3. donner l'axe de symétrie ;
4. calculer $f(10)$.

21 ** [REP, MOD]

Une parabole est tournée vers le haut, son sommet est $S(1; -3)$, et elle passe par le point $A(3; 5)$. Déterminer une expression de la fonction sous forme canonique.



22 *** [CH, RAI]

Pour tout réel m , on définit $f_m(x) = (x - m)^2 + 2$.

1. Quel est le sommet de la parabole associée ?
2. Que se passe-t-il lorsque m augmente ?
3. Déterminer m pour que l'axe de symétrie soit $x = -4$.

23 ** [RAI, COM]

Démontrer que, pour tout réel x , $x^2 - 4x + 7 \geq 3$. Préciser le cas d'égalité.

24 *** [CH, RAI, COM]

On considère $p(x) = x^2 + bx + c$. On sait que la parabole a pour sommet $S(2; -5)$.

1. Ecrire $p(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire b et c en développant.
3. Vérifier que l'abscisse du sommet vaut bien $-\frac{b}{2}$.

D — Problèmes et synthèse

25 *** [CH, MOD, RAI]

Un agriculteur dispose de 20 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire. On note x la longueur d'un côté, en mètres.



1. Justifier que l'autre côté mesure $10 - x$, puis que l'aire de l'enclos est $A(x) = x(10 - x)$, pour $0 \leq x \leq 10$.
2. Montrer que $A(x) = -(x - 5)^2 + 25$.
3. En déduire les dimensions qui maximisent l'aire, ainsi que cette aire maximale.
4. Interpréter le résultat dans la situation.

26 *** [CH, REP, MOD]

La hauteur, en mètres, d'un ballon au temps t , en secondes, est modélisée par

$$h(t) = -5(t - 2)^2 + 20.$$



Donner le sommet, la hauteur maximale, puis déterminer les instants où le ballon est à 15 mètres de hauteur.

27 *** [CH, MOD, RAI]

Une entreprise modélise son bénéfice, en centaines d'euros, par

$$B(q) = -2(q - 6)^2 + 72,$$

où q désigne le nombre de dizaines d'objets vendus.

1. Pour quelle quantité le bénéfice est-il maximal ?
2. Quel est ce bénéfice maximal ?
3. Calculer le bénéfice pour $q = 4$ et $q = 8$, puis expli-

quer l'égalité obtenue.

28 *** [CH, RAI]

Trouver toutes les fonctions de la forme $f(x) = a(x - 1)^2 + 3$ dont la courbe passe par le point $M(3; 11)$. Préciser l'orientation de la parabole obtenue.

29 *** [CH, RAI, COM]

On considère deux fonctions :

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = -(x - 2)^2 + 4.$$

Comparer leurs sommets, leurs axes, leurs extrema et leurs variations. Rédiger une conclusion sur le rôle du signe de a .

30 *** [CH, COM]

Rédiger une synthèse de cinq à huit lignes expliquant pourquoi la forme canonique est utile. La réponse doit évoquer au moins : sommet, axe de symétrie, extremum, variations et choix de méthode.