

TD N02 — Calcul algébrique, équations et inéquations

Première générale — Spécialité mathématiques

Objectif. Automatiser les transformations algébriques, choisir une forme adaptée, résoudre par équivalences et traduire des situations géométriques ou concrètes par une équation ou une inéquation.

Conseils. Sans calculatrice sauf indication contraire. Introduire l'inconnue dans les problèmes, conduire les résolutions par équivalences et conclure par $\mathcal{S}$, un intervalle ou une phrase contextualisée.

Repères. Les schémas sont des supports de lecture ou de modélisation : ils doivent être exploités, complétés ou interprétés.

A — Réactivation et automatismes

① ★ [REP, CAL]

Trois formes, une même expression. On donne

$$H(x) = (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

Associer chaque écriture à son nom, puis choisir la forme la plus efficace pour calculer $H(1)$, résoudre $H(x) = 0$ et lire le coefficient de x^2 .

② ★ [REP, CAL]

Rectangle de distributivité.

Compléter les quatre aires, puis développer

$$(2x - 3)(x + 4).$$

Recommencer sans dessin avec $(x - 5)(x - 2)$.

③ ★ [REP, CAL]

Voir une identité remarquable. À l'aide du carré, compléter :

$$(x + 5)^2 = \dots + \dots + \dots$$

Développer $(3x - 2)^2$, puis factoriser $x^2 + 12x + 36$.

④ ★ [CAL]

Développer mentalement, puis contrôler.

$$\begin{array}{lll} a) 3(x + 7) & b) -2(5 - x) & c) (x + 6)(x - 1) \\ d) (2x + 1)(x - 4) & e) (x - 3)^2 & f) (2x + 5)^2 \end{array}$$

⑤ ★★ [RAI, COM]

Chasser les fausses règles. Dire si chaque transformation est vraie pour tout réel x . Corriger les lignes fausses.

- 1) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$
- 2) $5(x - 2) = 5x - 10$
- 3) $(x - 7)(x + 7) = x^2 - 49$
- 4) $2x + 3 = 5x \iff 3 = 3x$
- 5) $-4x < 8 \iff x < -2$
- 6) $\frac{x - 1}{x + 2} = 0 \iff x = -2$

⑥ ★ [MOD, CAL]

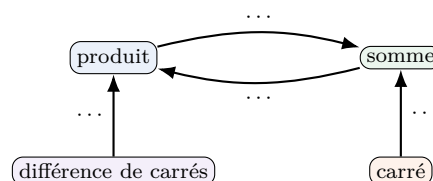
Programme de calcul. On choisit un réel x et on applique le programme suivant.

$$(\text{choisir } x) \rightarrow (+3) \rightarrow (\times 2) \rightarrow (-5x)$$

1. Écrire le résultat final.
2. Développer et réduire.
3. Traduire « le résultat vaut 0 » par une équation.

⑦ ★★ [REP, RAI]

Carte des transformations. Compléter les flèches par *développer*, *factoriser*, *réduire* ou *utiliser une identité remarquable*.



Donner un exemple pour chacune des quatre flèches.

⑧ ★ [CAL, RAI]

Calculer sans développer inutilement.

- a) $(x - 8)(x + 8)$ pour $x = 8$
- b) $(x - 4)^2 - 9$ pour $x = 4$
- c) $(2x + 1)(x - 5)$ pour $x = 0$
- d) $x^2 - 10x + 25$ pour $x = 5$

Pour chaque calcul, nommer la forme choisie.

B — Applications directes : transformer et résoudre

⑨ ★ [CAL]

Développer, réduire, ordonner.

- a) $(4x - 1)(x + 3)$
- b) $(2x - 5)(3x + 1)$
- c) $-3x(2x - 7) + 4x$
- d) $(x + 2)^2 - (x - 1)^2$
- e) $(5 - 2x)^2$
- f) $3(x - 4)^2 - 2(x + 1)$

⑩ ★ [CAL, RAI]

Factoriser en choisissant la bonne méthode.

- a) $7x + 21$
- b) $5x^2 - 10x$
- c) $x^2 - 81$
- d) $4x^2 - 12x + 9$
- e) $(x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 5)$
- f) $(3x - 2)^2 - (x + 4)^2$

11 ** [REP, RAI]

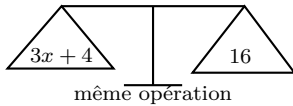
Choisir la bonne forme. On considère

$$E(x) = (x - 4)^2 - 9 = (x - 7)(x - 1) = x^2 - 8x + 7.$$

Indiquer la forme choisie pour calculer $E(4)$, résoudre $E(x) = 0$, trouver un antécédent de 7 et montrer que $E(x) + 9 \geq 0$.

12 * [CAL, COM]

Équilibre et équivalences. Le dessin rappelle qu'une même opération est effectuée sur les deux membres.



Résoudre dans $\mathbb{R}$ par équivalences :

$$\begin{array}{ll} a) 3x + 4 = 16 & b) 7x - 5 = 2x + 20 \\ c) -4x + 9 = 21 & d) 5(2x - 1) = 3x + 16. \end{array}$$

13 * [CAL]

Produit nul. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis conclure par $\mathcal{S} = \dots$.

$$\begin{array}{ll} a) (x - 5)(x + 2) = 0 & b) x(3x - 12) = 0 \\ c) (2x + 7)(5 - x) = 0 & d) (x - 1)^2 = 0 \end{array}$$

14 ** [CAL, RAI]

Mettre sous la forme produit nul.

$$\begin{array}{ll} a) x^2 - 16 = 0 & b) (x + 3)^2 - 25 = 0 \\ c) (x - 2)(x + 4) = 3(x - 2) \\ d) (2x + 1)^2 = (x - 5)^2 \end{array}$$

15 * [CAL, RAI]

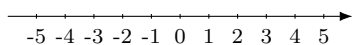
Quotient nul et valeurs interdites. Préciser les valeurs interdites, puis résoudre.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x - 6}{x + 1} = 0 & b) \frac{2x + 5}{x - 3} = 0 \\ c) \frac{(x - 4)(x + 2)}{x + 2} = 0. \end{array}$$

16 * [CAL, REP]

Inéquations du premier degré. Résoudre dans $\mathbb{R}$, écrire un intervalle et représenter les solutions sur une droite graduée.

$$\begin{array}{ll} a) 2x - 5 \leq 9 & b) -3x + 4 < 16 \\ c) 7 - 2x \geq x + 1 & d) 5(x - 1) > 2x + 7 \end{array}$$



17 ** [RAI, COM]

Justifier une équivalence. Compléter l'opération effectuée :

$$5x - 8 = 17 \iff 5x = 25 \quad (\dots)$$

$$-2x \geq 14 \iff x \leq -7 \quad (\dots)$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1 \quad (\dots)$$

Puis résoudre $4(x - 2) = 3x + 9$ et $-6x + 1 \leq 19$.

18 ** [CAL, RAI]

Équations avec préparation. Transformer d'abord le membre de gauche, puis résoudre.

$$a) (x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 24$$

$$b) (3x - 1)^2 - (3x + 1)^2 = 8$$

$$c) (x + 5)(x - 5) - x^2 = 10$$

$$d) (2x - 3)(x + 1) - 2x^2 = 7$$

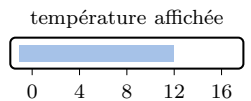
19 * [MOD, CAL]

Billets de musée. Une classe paie 48 € de réservation puis 7 € par élève. La facture est de 237 €. Déterminer le nombre d'élèves et contrôler la cohérence de la réponse.

MUSÉE	réservation 48 € 7 € par élève
-------	-----------------------------------

20 ** [MOD, RAI]

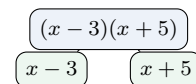
Chaîne du froid. Une sonde affiche $T = 18 - 2t$, où t est le nombre d'heures écoulées. Pendant combien de temps a-t-on $T > 4$? Interpréter l'intervalle obtenu.



C — Entraînement approfondi : choisir et justifier

21 ** [REP, RAI]

Arbre d'expression. L'arbre montre que l'expression $F(x) = (x - 3)(x + 5)$ est d'abord un produit.



1. Développer F .
2. Résoudre $F(x) = 0$.
3. Calculer $F(3)$, $F(-5)$ et $F(0)$ en choisissant la forme utile.

22 ** [RAI, COM]

Même résultat, deux méthodes. Résoudre

$$(x + 6)^2 = (x - 2)^2$$

d'abord en développant, puis en utilisant une différence de carrés. Comparer les deux démarches.

23 ** [MOD, CAL]

Aire variable. Un rectangle a pour longueur $x + 7$ et pour largeur $x - 1$, avec $x > 1$.

1. Écrire son aire sous formes factorisée et développée.
2. Déterminer x lorsque l'aire du rectangle est égale à celle d'un rectangle de dimensions 4 et $x + 7$.
3. Pour quelles valeurs de x le périmètre dépasse-t-il 30?

24 ** [CH, RAI]

Retrouver une expression cachée. Une expression vérifie

$$P(x) = (x + a)(x + b) = x^2 + 5x + 6.$$

Déterminer les entiers a et b , résoudre $P(x) = 0$, puis inventer une autre expression de même type.

25 ** [CAL, RAI]

Inéquations et pièges de signe. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et souligner l'étape où le sens de l'inégalité change.

$$a) -5x + 11 \leq -9 \quad b) 4 - 2(3x - 1) > 18$$

$$c) \frac{x-3}{5} < 2 \quad d) -\frac{x+4}{3} \geq 2$$

26 ** [RAI, COM]

Démontrer une identité. Démontrer que, pour tout réel x ,

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x.$$

Puis choisir deux entiers a et b pour que $(x+a)^2 - (x-b)^2$ se réduise à une expression affine.

27 *** [MOD, RAI]

Le couloir autour d'un jardin. Un jardin carré de côté x est entouré d'un couloir de largeur 2.



Exprimer l'aire du couloir de deux façons, prouver que les expressions obtenues sont égales, puis déterminer x lorsque cette aire vaut 64.

28 *** [CH, CAL]

Paramètre discret. Pour un entier k , on pose $P_k(x) = (x - k)(x + 2)$.

1. Pour quelles valeurs de k , le nombre 3 est-il solution de $P_k(x) = 0$?
2. Pour quelles valeurs de k , le nombre -2 est-il solution ?
3. Choisir k pour que $P_k(0) = 10$.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

29 *** [CH, RAI, CAL]

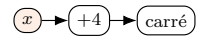
Galerie des formes. On considère

$$G(x) = (x + 4)^2 - (x - 2)^2.$$

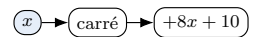
Sans suivre un ordre imposé, obtenir une forme factorisée et une forme développée, puis choisir la plus efficace pour calculer $G(0)$, résoudre $G(x) = 0$, $G(x) = 60$ et $G(x) > 0$.

30 *** [MOD, RAI]

Deux programmes concurrents. A : ajouter 4, puis mettre au carré.

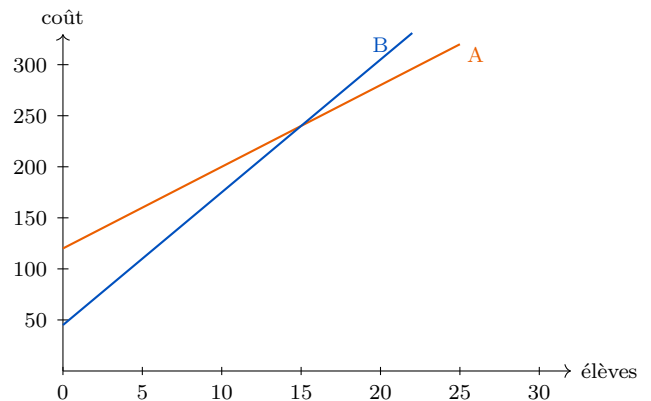


B : mettre au carré, puis ajouter $8x + 10$. Comparer les résultats pour tout réel x . Peuvent-ils être égaux ?



31 *** [CH, MOD, REP]

Deux salles pour une soirée. La salle A facture 120 € puis 8 € par élève ; la salle B facture 45 € puis 13 € par élève.



Choisir une démarche parmi tableau, graphique ou algèbre pour conjecturer le seuil, puis le démontrer par une inéquation et interpréter l'entier obtenu.

32 *** [CH, COM]

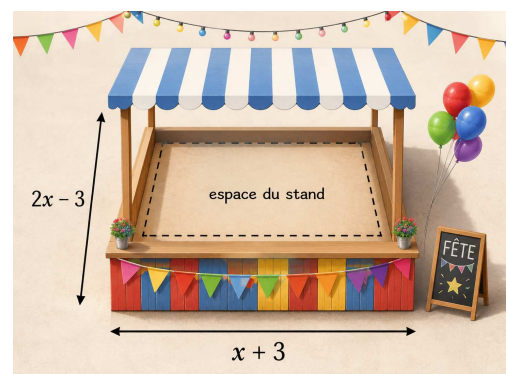
Mini-débat mathématique. Un élève veut résoudre

$$(x - 3)(x + 7) = 4(x - 3)$$

en écrivant $x - 3 = 4$ ou $x + 7 = x - 3$. Expliquer l'erreur, proposer une résolution correcte et inventer une équation proche où le produit nul s'applique immédiatement.

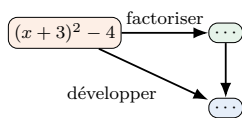
33 *** [CH, MOD, RAI]

Kiosque de fête : problème ouvert. Un stand rectangulaire doit avoir un périmètre de 36 m. Une longueur est notée $x + 3$ et la largeur $2x - 3$.



Déterminer les dimensions possibles, vérifier qu'elles sont positives, puis proposer une modification de l'énoncé donnant un autre stand de périmètre 36 m.

Méto des formes. Pour $K(x) = (x + 3)^2 - 4$, compléter les stations, résoudre $K(x) = 0$, calculer $K(-3)$, puis ajouter une nouvelle question qui rend utile la troisième forme.



Bilan personnel. Je sais :

- ☐ identifier une structure ;
- ☐ choisir une forme adaptée ;
- ☐ résoudre par équivalences ;
- ☐ interpréter une solution dans un contexte.

Exercices à reprendre :