

Objectif. Passer d'une affirmation intuitive à une formulation contrôlée : réactiver le calcul de début d'année, traduire entre langage, symboles et figures, distinguer élément et ensemble, implication et équivalence, puis apprendre à réfuter par un contre-exemple.

Conseils. Une réponse n'est pas seulement un résultat : nommer les objets, justifier, puis conclure. Pour une équation ou une inéquation, utiliser des transformations équivalentes et terminer par $\mathcal{S} = \dots$.

Graphismes. Les droites graduées, diagrammes et tableaux font partie des données : ils doivent être lus, complétés ou construits.

A — Réactivation et automatismes contextualisés

1★[CAL]

Calcul sans calculatrice. Donner le résultat sous la forme la plus simple.

a) $7 - 3 \times 4$, b) $5^2 - 2^4$, c) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$, d) $-2(3 - 7)$.

2★[CAL, REP]

Rectangle d'aires. Le rectangle aide à développer $(x + 4)(x + 1)$. Compléter les quatre aires, puis développer et réduire :

	x	4
x	$\dots$	$\dots$
1	$\dots$	$\dots$

a) $(x + 4)(x + 1)$, b) $3(2x - 5)$,
c) $(2x - 3)^2$, d) $(x - 5)(x + 5)$.

3★[RAI, COM]

Assertion, phrase ouverte ou non-sens ? Pour chaque ligne, cocher la bonne catégorie. Lorsqu'il s'agit d'une assertion, préciser sa valeur de vérité et justifier brièvement.

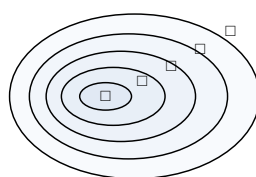
	assertion	phrase ouverte	non-sens
$7 \in \mathbb{N}$	☐	☐	☐
$x + 3 = 8$	☐	☐	☐
$\{2\} \in \mathbb{N}$	☐	☐	☐
$-1 \in [0; 4]$	☐	☐	☐
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$	☐	☐	☐

Réécrire la troisième ligne pour obtenir une assertion vraie.

4★[REP, CAL]

Le diagramme représente les inclusions usuelles. Incrire dans la zone la plus précise possible :

-3 , 0 , $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$,
 $\sqrt{2}$, π , $4,75$.

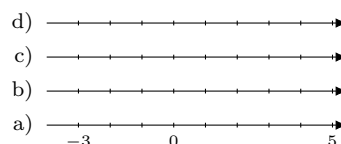


Ajouter les noms $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dans les cinq ensembles.

5★[REP]

Des inégalités aux intervalles. Écrire chaque ensemble sous forme d'intervalle, puis le représenter sur la droite correspondante.

a) $-3 \leq x < 2$, b) $x > 1$,
c) $x \leq -2$, d) $-1 < x \leq 4$.



6★[CAL, COM]

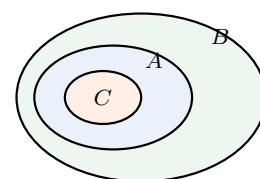
Diagnostic de début d'année. Résoudre dans $\mathbb{R}$ par équivalences et donner l'ensemble des solutions.

a) $3x - 5 = 7$, b) $5 - 2x < 9$,
c) $4(x - 1) = 2x + 6$, d) $\frac{x+1}{3} \geq 2$.

Pour b), écrire explicitement l'opération effectuée sur les deux membres au moment où le sens de l'inégalité change.

7★[REP, RAI]

On donne $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $C = \{2; 4\}$. Compléter par $\in, \notin, \subset$ ou $\not\subset$, puis justifier deux réponses :



$2 \dots A$ $C \dots A$
 $3 \dots A$ $A \dots B$
 $\{3\} \dots B$ $5 \dots C$

8★★[RAI, REP]

Tableau de vérité simple. On note P et Q deux assertions. Compléter le tableau. On rappelle que $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : P vraie et Q fausse.

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Expliquer en une phrase pourquoi une implication dont l'hypothèse est fausse n'est pas contredite.

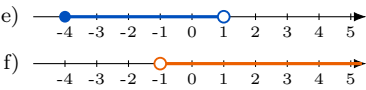
B — Applications directes

9★[REP, COM]

Quatre langages pour un même ensemble. Compléter chaque ligne.

Phrase	Inégalité	Intervalle
x est au moins -2		
x est strictement entre 1 et 5		
x ne dépasse pas 3		
$x < -1$ ou $x > 4$		

Pour la dernière ligne, utiliser une réunion de deux intervalles et la représenter. Lire ensuite chacune des deux droites ci-dessous, en faisant attention aux bornes incluses ou exclues, et écrire pour chacune la ligne complète (phrase, inégalité, intervalle).



10★★[REP, RAI]

On donne

$A = [-3; 2]$ et $B =]0; 5[$.

Lire les deux droites, puis déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$. Représenter les quatre résultats.



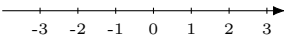
11★★[CAL, REP, COM]

Résoudre, représenter, vérifier. Résoudre dans $\mathbb{R}$, écrire l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle puis vérifier graphiquement qu'une valeur test appartient ou non à cet ensemble.

- a) $2x + 1 \leq 9$, tester $x = 4$,
- b) $7 - 3x > 1$, tester $x = 2$,
- c) $-5 \leq 2x - 1 < 7$, tester $x = -2$ et $x = 3$.

12★★[CAL, REP]

Appartenance d'une expression. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $2x + 1 \in [-3; 1[$. Donner la réponse sous forme d'une double inégalité et d'un intervalle, puis la représenter sur la droite.



13★★[RAI, REP]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère :

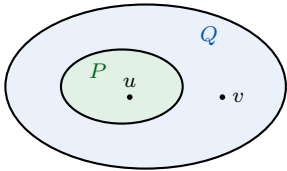
$$P : x > 3, \quad Q : x^2 > 9.$$



Étudier $P \Rightarrow Q$, puis sa réciproque. Pour chaque sens, donner une justification ou un contre-exemple. Représenter sur une droite les ensembles associés à P et à Q .

14★★[REP, RAI]

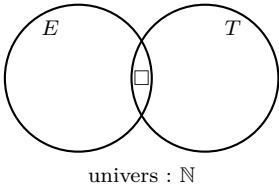
Lire une inclusion. Le diagramme indique que $P \subset Q$, et deux éléments u et v sont placés.



- Le schéma traduit-il $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, ou les deux ? Justifier en une phrase.
- Pour chaque phrase, dire si elle est *certaine*, *possible seulement* ou *impossible* :
 - si $x \in P$, alors $x \in Q$;
 - si $x \in Q$, alors $x \in P$;
 - il existe un élément de Q qui n'appartient pas à P .

15★★[REP, RAI, COM]

Dans $\mathbb{N}$, on note E l'ensemble des nombres pairs, T l'ensemble des multiples de 3, et S l'ensemble des multiples de 6.



- Placer S dans le diagramme.
- Formuler deux implications vraies.
- Étudier leurs réciproques.
- Traduire $S = E \cap T$ par une phrase.

16★★[RAI, COM]

Affirmation générale et négation. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie. Si elle est fausse, donner un contre-exemple. Écrire ensuite sa négation en français.

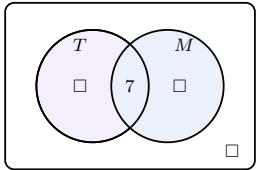
- Tout entier relatif a un carré strictement positif.
- Il existe un réel x tel que $x^2 = 2$.
- Pour tout réel x , si $x > 1$, alors $x^2 > 1$.
- Il existe un réel appartenant à $[2; 3]$ et à $] - \infty; 1]$.

C — Entraînement approfondi

17★★[MOD, REP, CAL]

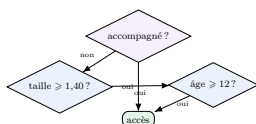
Dans une classe de 32 élèves, 18 pratiquent le théâtre, 15 la musique et 7 les deux.

- Compléter le diagramme.
- Combien ne pratiquent aucune de ces activités ?
- Écrire avec $\cap, \cup$ l'ensemble des élèves pratiquant au moins une activité, puis une seule.



18 ** [MOD, RAI]

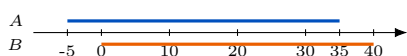
Un parc autorise l'accès à une attraction si la personne mesure au moins 1,40 m **et** a au moins 12 ans, **ou** si elle est accompagnée par un adulte.



- Traduire la règle par une formule logique.
- Tester quatre profils de votre choix, dont un cas limite.
- La phrase « être accompagné suffit » est-elle vraie? Sa réciproque?

19 ** [MOD, REP, RAI]

Deux capteurs mesurent correctement une température t : $A = [-5; 35]$ pour le premier, $B = [0; 40]$ pour le second. Une alarme se déclenche pour $t \notin]2; 32[$.



- Déterminer la zone où les deux capteurs sont fiables.
- Dans cette zone, pour quelles températures l'alarme sonne-t-elle?
- Représenter le résultat final.

20 ** [RAI, COM]

Clinique des erreurs. Pour chaque copie, nommer précisément l'erreur, corriger la rédaction et proposer une vérification.

Alice	$x^2 = 9 \iff x = 3$.
Bilal	$-2x < 6 \iff x < -3$.
Chloé	$2 \in A$, donc $A \in \mathbb{N}$.
Diego	4^2 est pair, donc le carré de tout entier est pair.
Émile	$2 \in A$ et $2 \in B$, donc $A \subset B$.

21 ** [RAI, COM]

Trois copies pour une même inéquation. Trois élèves résolvent $2x - 3 < 5$. Pour chaque copie, dire ce qu'elle prouve, ce qu'elle ne prouve pas, puis rédiger la réponse complète attendue.

Ana	$2x < 8$, donc $x < 4$.
Badis	$\mathcal{S} =]-\infty; 4[$.
Carmen	pour $x = 3$, on a bien $2x - 3 < 5$.

22 ** [REP, RAI]

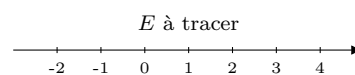
Dominos de traduction. Associer chaque carte de gauche à une carte centrale et à une carte de droite. Recopier les trois triplets obtenus.

$x \leq 2$	$] -\infty; 2]$	borne 2 incluse
$-1 < x < 3$	$] -1; 3[$	deux bornes exclues
$x \geq -2$	$[-2; +\infty[$	borne -2 incluse

Construire ensuite un quatrième domino correspondant à $x < -4$.

23 *** [REP, RAI, COM]

On définit $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4 \text{ et } x \neq 1\}$.



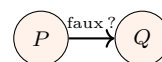
- Écrire E comme réunion d'intervalles.
- Le représenter ci-dessus.
- Décider si chacune des inclusions proposées est vraie :
 $[-2; 1[\subset E$, $E \subset [-2; 4]$, $[1; 4[\subset E$.
- Corriger toute inclusion fausse.

D — Synthèse, problèmes et prises d'initiative

24 *** [CH, RAI, COM]

Un entier n appartient à $[-5; 5]$. On considère :

$$P : n < 0, \quad Q : n^2 \leq 4, \quad R : n \text{ est pair}, \quad S : n \in]-1; 4[.$$



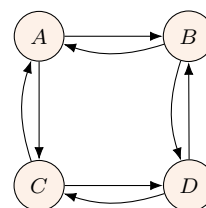
exactement deux vraies

On sait que $P \Rightarrow Q$ est fausse et qu'exactement deux des quatre assertions P, Q, R, S sont vraies. Déterminer n et rédiger une justification exhaustive.

25 *** [REP, RAI]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

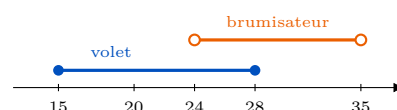
$$\begin{aligned} A : x > 2, & \quad B : x^2 > 4, \\ C : x + 1 > 3, & \quad D : x \in]2; +\infty[. \end{aligned}$$



- Sur le réseau, colorier les flèches correspondant à des implications vraies pour tout x .
- Regrouper les assertions équivalentes.
- Pour chaque flèche fausse, donner un contre-exemple.

26 *** [MOD, RAI, COM]

Dans une serre, un volet d'aération est ouvert lorsque la température t , en degrés Celsius, vérifie $t \in [15; 28]$. Un brumisateur fonctionne lorsque $t \in]24; 35]$. Un technicien reçoit une alerte lorsque *exactement un* des deux dispositifs est actif.



1. Déterminer les températures pour lesquelles les deux dispositifs sont actifs simultanément.
2. En déduire l'ensemble des températures d'alerte, sous forme de réunion d'intervalles.
3. Représenter cet ensemble.

27 *** [CH, MOD, REP]

Une zone de réglage doit être un **intervalle fermé** I , inclus dans $A \cup B$ et disjoint de C , avec

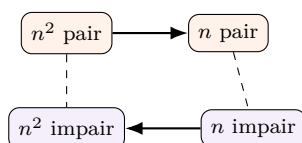
$$A = [-5; 2], \quad B = [1; 6], \quad C =]-1; 3[.$$



Déterminer l'intervalle I de longueur maximale. Justifier qu'aucun autre intervalle admissible n'est plus long.

28 *** [RAI, COM]

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut démontrer : « si n^2 est pair, alors n est pair ».



1. Écrire la réciproque.
2. La **contraposée** est : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Expliquer pourquoi elle a la même valeur de vérité que l'implication initiale.

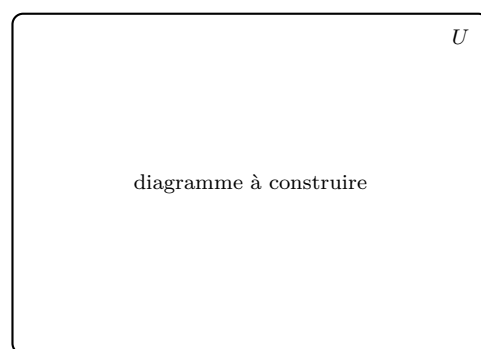
3. En posant $n = 2k + 1$, démontrer la contraposée.
4. Conclure.

29 *** [CH, REP, RAI]

Dans un univers U , construire trois ensembles A, B, C vérifiant simultanément :

$$A \subset B, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \not\subset B.$$

1. Dessiner un diagramme possible dans le cadre ci-dessous.
2. Placer au moins six éléments nommés.
3. Écrire quatre assertions d'appartenance vraies et deux fausses.
4. Expliquer pourquoi vos choix satisfont toutes les contraintes.



Bilan personnel. Cocher une case, puis noter l'exercice à reprendre.

	acquis	fragile	à reprendre
$x \in A / A \subset B$	☐	☐	☐
intervalle / inégalité	☐	☐	☐
implication / réciproque	☐	☐	☐
équivalence / contre-exemple	☐	☐	☐

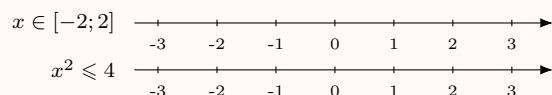
30 *** [CH, RAI, REP, COM]

Problème. On veut établir, pour tout réel x ,

$$x \in [-2; 2] \iff x^2 \leq 4.$$

1. Comparer les deux descriptions.

Représenter en bleu l'ensemble $[-2; 2]$, puis en orange l'ensemble des réels vérifiant $x^2 \leq 4$.



2. Sens direct.

À partir de $x \in [-2; 2]$, introduire $|x|$, puis justifier :

$$|x| \leq 2 \implies x^2 \leq 4.$$

3. Sens réciproque.

Raisonner par contraposée : montrer que

$$x \notin [-2; 2] \implies x^2 > 4.$$

Traiter séparément $x < -2$ et $x > 2$.

4. Organiser une preuve.

Les cartes ci-dessous contiennent des étapes utiles. Les recopier dans un ordre logique, indiquer le sens de l'implication traité et compléter les justifications manquantes.

$$x \in [-2; 2] \iff -2 \leq x \leq 2 \iff |x| \leq 2.$$

Comme $0 \leq |x| \leq 2$, on peut élever l'inégalité $|x| \leq 2$ au carré.

$$x \notin [-2; 2] \iff x < -2 \text{ ou } x > 2.$$

Dans chacun des deux cas précédents, $|x| > 2$, donc $x^2 > 4$.

5. Contrôle logique.

- Expliquer pourquoi tester seulement $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ ne démontre rien pour tous les réels.
- Donner un exemple montrant qu'un seul sens d'implication ne suffit pas à établir une équivalence.
- Rédiger une conclusion complète contenant les mots *pour tout réel et équivalent*.

Rédaction finale de l'exercice 30. Écrire ici une démonstration continue, avec les deux implications et une conclusion.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....