

OBJECTIFS

- reconnaître si deux événements sont indépendants ;
- utiliser les critères $P_A(B) = P(B)$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
- construire un arbre d'épreuves indépendantes ;
- calculer une probabilité de chemin ;
- traiter une répétition de quelques épreuves de Bernoulli ;
- distinguer indépendance et incompatibilité.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Dans une enquête menée auprès de 50 élèves, on note F l'événement « l'élève est une fille » et C l'événement « l'élève aime le chocolat ».

	Aime le chocolat C	N'aime pas C	Total
Fille F	18	12	30
Garçon $\bar{F}$	12	8	20
Total	30	20	50

1. Calculer $P(C)$.
2. Calculer $P_F(C)$.
3. Savoir que l'élève est une fille change-t-il la probabilité qu'il aime le chocolat ?

1. Quand une information ne change pas la probabilité

Dans N22, on a vu que conditionner par un événement revient à changer d'univers. Mais il existe des situations où l'information donnée ne modifie pas la probabilité de l'événement étudié.

Définition (Indépendance) Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P_A(B) = P(B).$$

Autrement dit, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Propriété (Critère avec l'intersection) Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Ce critère est souvent le plus pratique pour faire un calcul.

Méthode Pour tester l'indépendance de deux événements, on calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$, puis on compare les deux résultats. S'ils sont égaux, les événements sont indépendants ; sinon, ils ne le sont pas.

Exemple Dans l'activité de départ, $P(C) = \frac{30}{50} = 0,6$. De plus, parmi les 30 filles, 18 aiment le chocolat, donc $P_F(C) = \frac{18}{30} = 0,6$. L'information « l'élève est une fille » ne change pas la probabilité de C . Les événements F et C sont donc indépendants.

Vigilance. Indépendant ne signifie pas « sans lien dans le langage courant ». En mathématiques, cela signifie que la probabilité conditionnelle reste la même.

⇒ **TD N23 – Partie A : calculer et interpréter une indépendance.**

2. Indépendance : formes équivalentes

Lorsque $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, l'indépendance peut se lire dans les deux sens : si A ne change pas la probabilité de B , alors B ne change pas la probabilité de A .

Propriété (Symétrie de l'indépendance) Si A et B sont indépendants et si $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, alors

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A).$$

Propriété (Complémentaires) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A)P(B)$	$P(A)P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})P(B)$	$P(\overline{A})P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Méthode Pour compléter un tableau lorsque A et B sont indépendants, on peut utiliser $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, puis compléter les marges et les événements contraires.

Exemple On sait que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,7$, et que A et B sont indépendants. Alors

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28.$$

On obtient aussi $P(A \cap \overline{B}) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

Vigilance. On ne peut pas écrire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ sans justification. Cette égalité est vraie uniquement si l'indépendance est donnée ou démontrée.

⇒ TD N23 – Partie A : critères équivalents et tableaux d'indépendance.

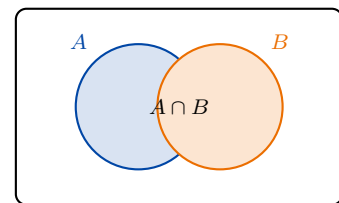
3. Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

Deux événements incompatibles ne peuvent pas se produire en même temps. Deux événements indépendants peuvent se produire ensemble, mais l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre.

Définition (Événements incompatibles) Deux événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas,

$$P(A \cap B) = 0.$$

Propriété (Indépendance et incompatibilité) Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, deux événements incompatibles ne peuvent pas être indépendants. En effet, $P(A \cap B) = 0$, tandis que $P(A) \times P(B) > 0$.



intersection à comparer à $P(A)P(B)$

Méthode Pour éviter la confusion, on pose deux questions :

- les deux événements peuvent-ils se produire ensemble ?
- l'information sur l'un change-t-elle la probabilité de l'autre ?

Exemple On lance un dé équilibré. Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir 1 ». Les événements sont incompatibles, car un résultat ne peut pas être à la fois pair et égal à 1. Ils ne sont pas indépendants, car $P(A \cap B) = 0$, alors que $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Vigilance. Dire que deux événements sont incompatibles, c'est dire qu'ils ne peuvent pas arriver ensemble. Dire qu'ils sont indépendants, c'est dire que l'information sur l'un ne change pas la probabilité de l'autre.

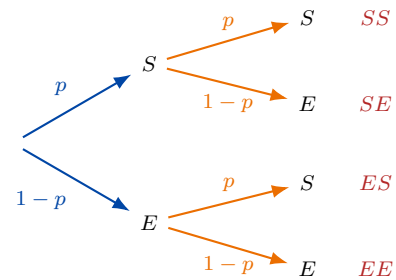
⇒ TD N23 – Partie B : distinguer indépendance, dépendance et incompatibilité.

4. Épreuves indépendantes et arbres pondérés

Lorsque l'on répète une expérience dans les mêmes conditions, il est fréquent que les résultats des différentes épreuves soient indépendants. Dans ce cas, les probabilités des branches restent les mêmes à chaque niveau de l'arbre.

Définition (Épreuves indépendantes) Des épreuves sont indépendantes lorsque le résultat de l'une ne modifie pas les probabilités des résultats des autres.

Propriété (Règle du produit dans un arbre) Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.



Méthode Pour modéliser deux épreuves indépendantes ayant une probabilité de succès p , on place à chaque niveau une branche S de probabilité p et une branche E de probabilité $1 - p$. Les mêmes probabilités réapparaissent après chaque branche.

Exemple Une machine fabrique une pièce conforme avec probabilité 0,92. On prélève deux pièces de manière indépendante. La probabilité d'obtenir deux pièces conformes est

$$0,92 \times 0,92 = 0,8464.$$

La probabilité d'obtenir une pièce conforme puis une pièce non conforme est

$$0,92 \times 0,08 = 0,0736.$$

Vigilance. Dans un arbre d'épreuves indépendantes, les probabilités ne changent pas d'un niveau à l'autre. Si l'énoncé dit « sans remise », les épreuves ne sont généralement pas indépendantes.

⇒ TD N23 – Partie C : arbres d'épreuves indépendantes et probabilités de chemins.

5. Répéter une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues : succès ou échec. En Première, on utilise surtout des arbres pour traiter un petit nombre de répétitions.

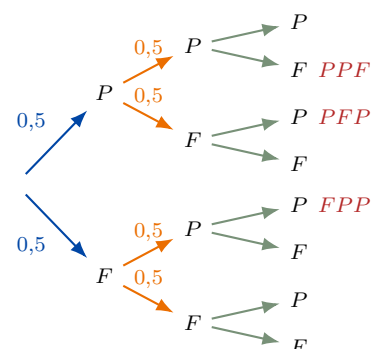
Définition (Épreuve de Bernoulli) Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues : un succès S , de probabilité p , et un échec E , de probabilité $1 - p$.

Définition (Répétition indépendante) Répéter une épreuve de Bernoulli de façon indépendante signifie que chaque épreuve a la même probabilité de succès p , et que le résultat d'une épreuve ne modifie pas les probabilités des suivantes.

Méthode Pour calculer la probabilité d'obtenir exactement k succès lors de quelques répétitions :

1. construire ou imaginer l'arbre ;
2. repérer tous les chemins contenant exactement k succès ;
3. calculer la probabilité de chaque chemin ;
4. additionner les probabilités des chemins favorables.

Exemple On lance trois fois une pièce équilibrée. On cherche la probabilité d'obtenir exactement deux piles. Les chemins favorables sont PPF , PFP et FPP . Chaque chemin a pour probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Donc la probabilité cherchée vaut $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.



Vigilance. Pour « exactement deux succès », il ne suffit pas de calculer la probabilité d'un seul ordre, par exemple SSE . Il faut compter tous les ordres possibles.

⇒ TD N23 – Partie C : répétitions indépendantes et nombre de succès.

6. Choisir une représentation et rédiger

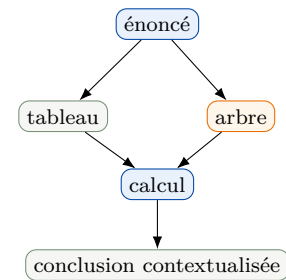
Le choix entre formule, tableau et arbre dépend des données de l'énoncé. L'arbre est très efficace pour une succession d'épreuves ; le tableau est souvent plus adapté pour deux critères observés sur une population.

Méthode Avant de calculer, écrire une phrase du type :

- « On teste l'indépendance de A et B » ;
- « On cherche la probabilité du chemin SSE » ;
- « On cherche la probabilité d'obtenir exactement deux succès ».

Cette phrase aide à choisir la bonne représentation et évite de mélanger intersection, conditionnement et indépendance.

Exemple Une entreprise utilise deux machines indépendantes. La machine A fonctionne un jour donné avec probabilité 0,97, et la machine B avec probabilité 0,95. La probabilité que les deux machines fonctionnent est $0,97 \times 0,95 = 0,9215$. La probabilité qu'au moins une des deux fonctionne est $1 - P(\text{aucune ne fonctionne}) = 1 - 0,03 \times 0,05 = 0,9985$.



Propriété (Événement contraire) Dans un problème d'épreuves indépendantes, il est parfois plus simple de passer par l'événement contraire. Par exemple, « au moins un succès » est le contraire de « aucun succès ».

Vigilance. La rédaction doit toujours revenir au contexte : une probabilité calculée comme 0,9985 doit être interprétée comme « environ 99,85 % de chances qu'au moins une machine fonctionne ».

⇒ **TD N23 – Partie D : choisir une méthode et rédiger un problème complet.**

7. Synthèse

A RETENIR

- Deux événements A et B sont indépendants lorsque savoir que l'un est réalisé ne change pas la probabilité de l'autre.
- Si $P(A) > 0$, l'indépendance peut s'écrire $P_A(B) = P(B)$.
- Le critère le plus utilisé est $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors leurs événements contraires associés le sont aussi.
- Des événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants.
- Dans un arbre, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches.
- Pour des épreuves indépendantes, les probabilités des branches restent les mêmes à chaque répétition.
- Pour obtenir exactement k succès, on repère tous les chemins favorables, puis on additionne leurs probabilités.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,12$, dire si A et B sont indépendants.
2. Si A et B sont indépendants, $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,25$, calculer $P(A \cap B)$.
3. Dans un tirage de carte, comparer indépendance et incompatibilité sur un exemple simple.
4. Une épreuve de Bernoulli a une probabilité de succès 0,8. Calculer la probabilité de deux succès en deux répétitions indépendantes.
5. Une pièce équilibrée est lancée trois fois. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une pile.
6. Expliquer pourquoi « au moins un succès »

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P(A)P(B)$;
- tester une indépendance avec le bon critère ;
- reconnaître une incompatibilité ;
- construire un arbre pondéré ;
- multiplier le long d'un chemin ;
- additionner plusieurs chemins favorables ;
- utiliser l'événement contraire dans les formulations « au moins ».

⇒ **TD N23 – Toutes les parties : indépendance, arbres et épreuves répétées.**