

OBJECTIFS

- reconnaître l'indépendance de deux événements ;
- tester l'indépendance avec des probabilités, un tableau ou un arbre ;
- distinguer événements indépendants et épreuves indépendantes ;
- construire un arbre pour des épreuves répétées ;
- calculer des probabilités dans une répétition d'épreuves de Bernoulli ;
- utiliser une simulation pour contrôler une conjecture.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On lance deux fois une même pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer est 0,6.

1. La probabilité d'obtenir pile au deuxième lancer dépend-elle du résultat du premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir pile puis face ?
3. Quelle différence ferait une expérience où le premier résultat modifie la situation du deuxième tirage ?

Cette activité fait apparaître l'idée centrale : certains arbres se répètent à l'identique, d'autres non.

1. Indépendance de deux événements

L'indépendance signifie qu'une information ne modifie pas la probabilité d'un événement. C'est donc une notion liée au conditionnement.

Définition (Indépendance de deux événements) Soient A et B deux événements, avec $P(A) > 0$. On dit que A et B sont indépendants lorsque

$$P_A(B) = P(B).$$

Autrement dit, savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de réalisation de B .

Propriété (Critère avec l'intersection) Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Ce critère est souvent le plus pratique pour vérifier une indépendance.

Méthode Pour tester l'indépendance de deux événements, on calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$. Si les deux nombres sont égaux, les événements sont indépendants ; sinon, ils ne le sont pas.

Exemple Si $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,12$, alors

$$P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

Donc A et B sont indépendants. Si, avec les mêmes $P(A)$ et $P(B)$, on avait $P(A \cap B) = 0,10$, les événements ne seraient pas indépendants.

Vigilance. Deux événements indépendants ne sont pas incompatibles. Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$. Ce n'est pas la même idée.

⇒ **TD N23 – Partie A : tester une indépendance avec une intersection.**

2. Tester l'indépendance dans un tableau

Un tableau croisé permet de lire des intersections et des probabilités marginales. Il est donc bien adapté pour tester une indépendance.

Méthode Pour tester l'indépendance dans un tableau d'effectifs :

1. calculer l'effectif total ;
2. lire les effectifs de A , de B et de $A \cap B$;
3. convertir en probabilités ;
4. comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

Exemple Dans le tableau ci-contre, on choisit une personne au hasard. On a

	B	$\overline{B}$	Total
A	24	56	80
$\overline{A}$	36	84	120
Total	60	140	200

$$P(A) = \frac{80}{200} = 0,4, \quad P(B) = \frac{60}{200} = 0,3,$$

et

$$P(A \cap B) = \frac{24}{200} = 0,12.$$

Comme $0,4 \times 0,3 = 0,12$, les événements A et B sont indépendants.

Propriété (Indépendance et événement contraire) Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants. De même, $\overline{A}$ et B , ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$, sont indépendants.

Exemple Dans le tableau précédent, comme A et B sont indépendants, on sait aussi que A et $\overline{B}$ sont indépendants. On peut le vérifier :

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{56}{200} = 0,28$$

et

$$P(A) \times P(\overline{B}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28.$$

Vigilance. Un écart dû à un arrondi peut apparaître dans un énoncé décimal. Dans ce cas, il faut préciser si l'on conclut exactement ou à partir de valeurs arrondies.

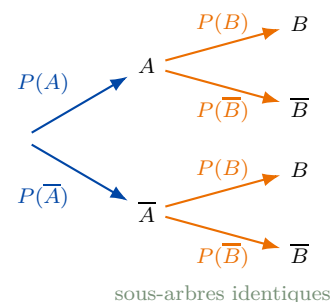
⇒ **TD N23 – Partie A : tableaux croisés et indépendance.**

3. Épreuves indépendantes et arbres répétés

Il faut distinguer l'indépendance de deux événements et l'indépendance de deux épreuves. Deux épreuves sont indépendantes lorsque le résultat de l'une ne modifie pas le modèle probabiliste de l'autre.

Définition (Succession d'épreuves indépendantes) Une succession d'épreuves est dite indépendante lorsque les probabilités des résultats d'une épreuve ne dépendent pas des résultats obtenus aux épreuves précédentes.

Propriété (Arbre d'épreuves indépendantes) Dans un arbre représentant des épreuves indépendantes, les sous-arbres associés à une même épreuve sont identiques. Les probabilités de deuxième niveau ne sont donc pas des probabilités modifiées par la première branche.



Méthode Pour construire un arbre d'épreuves indépendantes, on répète à l'identique les mêmes branches à chaque étape. La probabilité d'un chemin se calcule en multipliant les probabilités des branches parcourues.

Exemple On lance deux fois une pièce telle que $P(Pile) = 0,6$. Les deux lancers sont modélisés comme indépendants. La probabilité d'obtenir pile puis face est

$$0,6 \times 0,4 = 0,24.$$

La probabilité d'obtenir exactement une fois pile est

$$0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48.$$

Vigilance. Dans un arbre d'épreuves indépendantes, les branches se répètent. Dans un arbre de probabilités conditionnelles quelconque, les sous-arbres peuvent être différents.

⇒ **TD N23 – Partie B : arbres d'épreuves indépendantes et probabilités de chemins.**

4. Modéliser : avec remise ou sans remise

L'indépendance n'est pas seulement un calcul : c'est un choix de modèle. Deux situations qui se ressemblent peuvent conduire à des arbres différents.

Méthode Pour décider si des épreuves peuvent être modélisées comme indépendantes, on se demande si la première épreuve modifie la composition, l'état ou les conditions de la seconde.

- Avec remise, on revient à la situation initiale : l'indépendance est souvent un modèle adapté.
- Sans remise, la composition change : les épreuves ne sont généralement pas indépendantes.

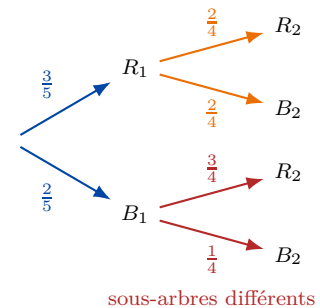
Exemple Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire deux boules sans remise. On a

$$P(R_2) = \frac{3}{5}$$

avant tout tirage, mais

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4}.$$

Comme $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$, le résultat du premier tirage modifie le modèle du second : les épreuves ne sont pas indépendantes.



Propriété (Rôle du modèle) Dire que des épreuves sont indépendantes revient à affirmer que le modèle probabiliste de chaque épreuve reste le même, quels que soient les résultats précédents.

Vigilance. Le mot « hasard » ne signifie pas automatiquement « indépendance ». Il faut analyser la situation : remise, remplacement, mémoire du système, changement de composition ou influence possible.

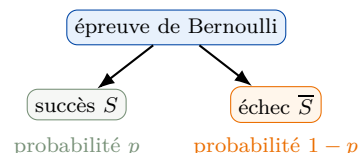
⇒ **TD N23 – Partie B : distinguer avec remise, sans remise et indépendance.**

5. Répétitions d'une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire avec deux issues : succès ou échec. En Première, on étudie des répétitions indépendantes avec un petit nombre d'épreuves, généralement $n \leq 4$.

Définition (Épreuve de Bernoulli) Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui possède deux issues :

- un succès S , de probabilité p ;
- un échec $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.



Propriété (Probabilité d'un chemin) Dans une répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli, un chemin contenant k succès et $n - k$ échecs a pour probabilité

$$p^k(1 - p)^{n-k}.$$

Méthode Pour calculer la probabilité d'obtenir exactement k succès, on compte les chemins contenant k succès, puis on additionne leurs probabilités. Pour $n \leq 4$, on peut faire ce comptage directement dans l'arbre ou dans un tableau de chemins.

Exemple Un joueur réussit un tir avec une probabilité $p = 0,8$. Il effectue trois tirs indépendants. La probabilité d'obtenir exactement deux réussites correspond aux chemins $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$ et $\bar{S}SS$. Ainsi :

$$P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384.$$

Chemin	Nombre de succès	Probabilité
SSS	3	p^3
$SS\bar{S}$	2	$p^2(1 - p)$
$S\bar{S}S$	2	$p^2(1 - p)$
$\bar{S}SS$	2	$p^2(1 - p)$
autres chemins	0 ou 1	à calculer selon le chemin

Vigilance. Le nombre $p^k(1 - p)^{n-k}$ est la probabilité d'un chemin précis. S'il existe plusieurs chemins favorables, il faut les compter puis additionner.

⇒ **TD N23 – Partie C : épreuves de Bernoulli répétées et comptage de chemins.**

6. Compléments : au moins un succès et simulation

Certaines questions se traitent plus efficacement par l'événement contraire. C'est le cas de l'expression « au moins un succès ».

Propriété (Au moins un succès) Dans une répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p ,

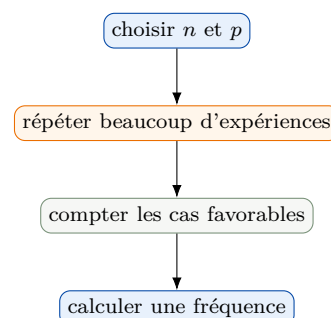
$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n.$$

En effet, l'événement contraire de « au moins un succès » est « aucun succès ».

Exemple Un composant fonctionne avec une probabilité 0,9. On teste quatre composants indépendants. La probabilité qu'au moins un fonctionne est

$$1 - 0,1^4 = 1 - 0,0001 = 0,9999.$$

Méthode Une simulation permet d'estimer une probabilité lorsque le calcul exact est long ou pour contrôler une conjecture. Elle ne remplace pas une démonstration, mais elle aide à vérifier la cohérence d'un résultat.



```

from random import random

def simule_au_moins_un(n, p, essais):
    compteur = 0
    for i in range(essais):
        succes = 0
        for k in range(n):
            if random() < p:
                succes = succes + 1
        if succes >= 1:
            compteur = compteur + 1
    return compteur/essais

```

Exemple L'appel `simule_au_moins_un(4, 0.9, 10000)` simule 10000 répétitions de quatre épreuves indépendantes de probabilité de succès 0,9. La fréquence obtenue doit être proche de 0,9999, mais elle varie d'une exécution à l'autre.

Vigilance. Une fréquence simulée fluctue. Si elle est proche de la probabilité théorique, cela rassure sur le modèle ; si elle est éloignée, il faut augmenter le nombre d'essais ou vérifier le programme.

⇒ **TD N23 – Partie D : choisir une méthode, utiliser un complémentaire et contrôler par simulation.**

7. Synthèse

A RETENIR

- Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$.
- Le critère pratique est $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Dans un tableau, on teste l'indépendance en comparant une case intérieure avec le produit des marges correspondantes.
- Des épreuves indépendantes donnent des sous-arbres identiques.
- La probabilité d'un chemin dans un arbre se calcule en multipliant les probabilités des branches.
- Une épreuve de Bernoulli possède deux issues : succès S de probabilité p , échec $\overline{S}$ de probabilité $1 - p$.
- Dans n épreuves de Bernoulli indépendantes, un chemin avec k succès a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$.
- Pour « au moins un succès », on pense souvent au contraire : $1 - (1 - p)^n$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,2$, les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Si $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et A , B sont indépendants, calculer $P(A \cap B)$.
3. Une urne contient 4 boules rouges et 6 bleues. On tire deux fois avec remise. Construire mentalement l'arbre et calculer la probabilité d'obtenir deux rouges.
4. Même urne, mais sans remise. Les deux tirages sont-ils indépendants ? Justifier.
5. Une épreuve de Bernoulli a pour probabilité de succès $p = 0,25$. Calculer la probabilité du chemin $S\overline{S}S$.
6. Sur trois répétitions indépendantes avec $p = 0,25$, calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- distinguer $P_A(B)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$;
- tester $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
- lire les marges et les intersections dans un tableau ;
- reconnaître des sous-arbres identiques ;
- différencier tirage avec remise et sans remise ;
- compter les chemins favorables dans un arbre ;
- utiliser l'événement contraire pour « au moins un ».

⇒ **TD N23 – Toutes les parties : indépendance, arbres, Bernoulli et simulations.**