

N22 Probabilités conditionnelles : tableaux, arbres et probabilités totales

OBJECTIFS

- lire une probabilité conditionnelle dans un énoncé ;
- distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$;
- calculer avec un tableau croisé d'effectifs ou de probabilités ;
- construire et exploiter un arbre pondéré ;
- utiliser la formule des probabilités totales ;
- interpréter une situation de conditionnement inversé.

ACTIVITÉ DE DÉPART

On étudie un test médical sur 1000 personnes. L'événement M signifie « la personne est malade » et T signifie « le test est positif ».

	Test +	Test -	Total
Malade M	19	1	20
Non malade $\overline{M}$	69	911	980
Total	88	912	1000

1. Parmi les personnes malades, quelle proportion a un test positif ?
2. Parmi les personnes ayant un test positif, quelle proportion est malade ?
3. Ces deux proportions répondent-elles à la même question ?

1. Conditionner : changer d'univers

Lorsqu'une information supplémentaire est donnée, le calcul de probabilité se fait dans un univers réduit. Dire « sachant A » signifie que l'on ne considère plus que les issues où A est réalisé.

Définition (Probabilité conditionnelle) Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$. La probabilité de B sachant A est le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Elle se lit : « probabilité de B sachant A ».

Propriété (Formule de l'intersection) Si $P(A) > 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Méthode Pour reconnaître une probabilité conditionnelle dans un énoncé, repérer l'information déjà acquise. Les formulations « parmi les A », « sachant que A », « chez les personnes qui vérifient A » conduisent à un calcul de type $P_A(\cdot)$.

Exemple Dans l'activité de départ, parmi les personnes malades, 19 ont un test positif sur 20. Donc $P_M(T) = \frac{19}{20} = 0,95$. En revanche, parmi les personnes positives au test, 19 sont malades sur 88. Donc $P_T(M) = \frac{19}{88} \approx 0,216$. Les deux probabilités ne répondent pas à la même question.

Vigilance. Il ne faut pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$. Dans les deux cas, l'intersection $A \cap B$ apparaît, mais le dénominateur change.

⇒ **TD N22 – Partie A : distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.**

2. Calculer dans un tableau croisé

Un tableau croisé organise deux critères. Les cases intérieures correspondent à des intersections d'événements. Les marges donnent les probabilités ou effectifs d'un seul événement.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	A
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A}$
Total	B	$\overline{B}$	Ω

Méthode Pour calculer dans un tableau :

1. identifier la population totale ;
2. repérer la ligne ou la colonne imposée par la condition ;
3. choisir le bon numérateur ;
4. diviser par le total correspondant à l'information connue.

Exemple Dans le tableau de l'activité, $P(T) = \frac{88}{1000} = 0,088$, $P(M \cap T) = \frac{19}{1000} = 0,019$, et $P_T(M) = \frac{19}{88}$.

Propriété (Lecture des marges) Dans un tableau croisé, une case intérieure correspond à une intersection, tandis qu'un total de ligne ou de colonne correspond à un événement simple.

Vigilance. Le total utilisé au dénominateur dépend de la condition. Si l'on demande une probabilité « parmi les positifs », le dénominateur est le total des positifs, pas le total général.

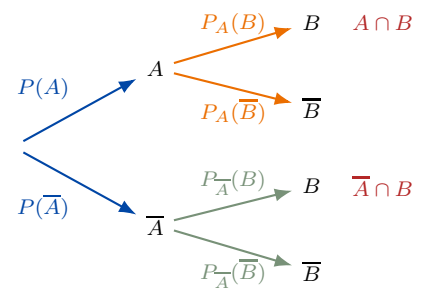
⇒ TD N22 – Partie A : calculs dans des tableaux croisés d'effectifs.

3. Construire et lire un arbre pondéré

Un arbre pondéré représente une succession de choix ou d'informations. Les probabilités inscrites sur les branches de deuxième niveau sont des probabilités conditionnelles.

Propriété (Règle du produit) Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$



Méthode Pour construire un arbre à deux niveaux, on choisit d'abord l'événement du premier niveau, puis on complète chaque branche avec l'événement du second niveau et son contraire. À chaque noeud, la somme des probabilités issues de ce noeud vaut 1.

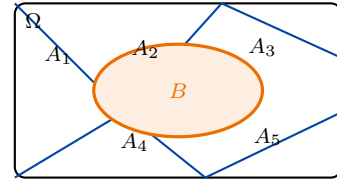
Exemple Dans l'activité, on peut choisir M au premier niveau. Alors $P(M) = 0,02$, $P(\overline{M}) = 0,98$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,07$. Le chemin M puis T a pour probabilité $0,02 \times 0,95 = 0,019$.

Vigilance. Les probabilités de deuxième niveau dépendent de la branche précédente. On n'écrit pas automatiquement les mêmes nombres après A et après $\overline{A}$.

⇒ TD N22 – Partie B : construire un arbre pondéré et calculer des probabilités de chemins.

4. Formule des probabilités totales

Pour calculer la probabilité d'un événement B , il arrive que plusieurs chemins conduisent à B . On additionne alors les probabilités de ces chemins.



Définition (Partition) Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion est Ω . Autrement dit, chaque issue appartient à un et un seul des événements A_i .

Théorème (Formule des probabilités totales) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement B ,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Si chaque $P(A_i) > 0$, alors

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Méthode Dans un arbre, pour calculer $P(B)$, on repère tous les chemins qui se terminent par B , on calcule la probabilité de chacun, puis on les additionne.

Exemple Dans l'activité, l'événement T peut se produire par deux chemins : $M \cap T$ ou $\overline{M} \cap T$. Donc

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,07 = 0,0876.$$

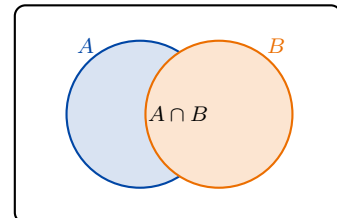
Ce résultat est proche de $\frac{88}{1000} = 0,088$, l'écart venant de l'arrondi des données du tableau.

Vigilance. Additionner des branches directement n'a pas de sens. On additionne des probabilités de chemins complets, après avoir multiplié le long de chaque chemin.

⇒ **TD N22 – Partie B : utiliser la formule des probabilités totales.**

5. Inverser un conditionnement

Dans beaucoup de situations, on connaît $P_A(B)$, mais on cherche $P_B(A)$. Ces deux probabilités ne sont pas égales en général.



même intersection, conditionnements différents

Propriété (Conditionnement inverse) Si $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, alors

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ainsi, pour passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$, il faut connaître ou calculer $P(B)$.

Méthode Pour calculer une probabilité inverse :

1. calculer l'intersection avec $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$;
2. calculer la probabilité de l'événement conditionnant par probabilités totales ;
3. diviser : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple Avec le test médical, on connaît $P_M(T) = 0,95$, mais on cherche $P_T(M)$. On a $P(M \cap T) = 0,02 \times 0,95 = 0,019$. On a aussi $P(T) = 0,0876$. Donc

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0876} \approx 0,217.$$

Même avec un test fiable chez les malades, une personne positive n'est pas forcément malade avec une probabilité proche de 1, car la maladie est rare.

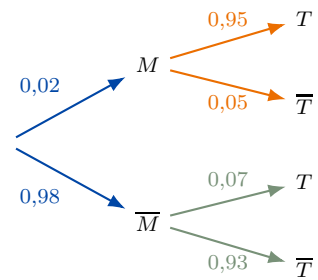
Vigilance. Une phrase du type « le test est fiable à 95 % » ne suffit pas toujours. Il faut savoir quelle probabilité est donnée : $P_M(T)$, $P_T(M)$, $P_{\overline{M}}(\overline{T})$ ou une autre.

⇒ **TD N22 – Partie C : inverser un conditionnement dans des situations de faux positifs.**

6. Choisir entre tableau et arbre

Méthode Le tableau est efficace quand on dispose d'effectifs ou de deux critères croisés. L'arbre est efficace quand une situation se décrit en étapes, ou quand les probabilités conditionnelles sont données dans l'énoncé.

Exemple Un lycée compte 60 % de filles. Parmi les filles, 25 % suivent une option artistique. Parmi les garçons, 15 % suivent cette option. Ici, l'arbre est naturel : premier niveau F ou $\overline{F}$, second niveau A ou $\overline{A}$. On calcule alors $P(A) = 0,60 \times 0,25 + 0,40 \times 0,15 = 0,21$.



Propriété (Passage entre registres) Une même situation peut souvent être représentée par un tableau, un arbre ou des formules. Le choix de la représentation dépend des données disponibles et de la question posée.

Méthode Avant de calculer, écrire une phrase : « On cherche $P_A(B)$ », « On cherche $P(A \cap B)$ » ou « On cherche $P(B)$ ». Cette phrase évite de choisir une mauvaise formule.

Vigilance. L'arbre ne remplace pas la compréhension. Les branches doivent être pondérées avec les probabilités correspondant réellement au conditionnement indiqué.

⇒ **TD N22 – Partie D : choisir une représentation et rédiger une résolution complète.**

7. Synthèse

A RETENIR

- Conditionner par A , c'est calculer dans l'univers réduit où A est réalisé.
- Si $P(A) > 0$, alors $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
- On en déduit $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Dans un tableau croisé, une case intérieure représente une intersection ; une marge représente un événement simple.
- Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches.
- Pour calculer un événement obtenu par plusieurs chemins, on additionne les probabilités de ces chemins : c'est la formule des probabilités totales.
- En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$. Pour inverser un conditionnement, il faut recalculer le bon dénominateur.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,12$, calculer $P_A(B)$.
2. Si $P(A) = 0,3$ et $P_A(B) = 0,8$, calculer $P(A \cap B)$.
3. Dans un tableau de 250 personnes, 80 vérifient A , et 24 vérifient $A \cap B$. Calculer $P_A(B)$.
4. Dans un arbre, $P(A) = 0,6$, $P_A(B) = 0,2$, $P(\overline{A}) = 0,4$, $P_{\overline{A}}(B) = 0,5$. Calculer $P(B)$.
5. Expliquer pourquoi $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne désignent pas la même probabilité.
6. Dans une situation de test positif, dire quelle probabilité répond à la question : « sachant que le test est positif, quelle est la probabilité d'être malade ? »

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- identifier l'événement conditionnant ;
- distinguer intersection et probabilité conditionnelle ;
- compléter un tableau croisé ;
- pondérer correctement un arbre ;
- multiplier le long d'un chemin ;
- additionner les chemins menant au même événement ;
- inverser un conditionnement sans confondre les dénominateurs.

