

OBJECTIFS

- modéliser une évolution exponentielle ;
- relier une suite géométrique et une fonction exponentielle ;
- distinguer modèle discret et modèle continu ;
- interpréter les paramètres C , q et k ;
- utiliser un algorithme pour chercher un seuil ;
- discuter la cohérence d'un modèle.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Une population vaut 1000 individus au départ.
On propose deux modèles :

$$u_n = 1000 \times 1,03^n \quad \text{et} \quad f(t) = 1000e^{0,03t}.$$

1. Que représente n dans le premier modèle ?
2. Que représente t dans le second ?
3. Les deux modèles donnent-ils exactement la même évolution ?

1. Modèle discret : suite géométrique

Une évolution est dite discrète lorsqu'elle est observée à des dates séparées : chaque année, chaque mois, chaque génération, etc.

Définition (Modèle discret exponentiel) Un modèle discret d'évolution exponentielle est souvent donné par une suite géométrique :

$$u_n = Cq^n,$$

où C est la valeur initiale et $q > 0$ est le coefficient multiplicateur à chaque étape.

Propriété (Lien avec une évolution en pourcentage) Une hausse de $t\%$ par étape correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$. Une baisse de $t\%$ par étape correspond à $q = 1 - \frac{t}{100}$, avec $0 < t < 100$.

Méthode Pour modéliser une évolution discrète, on repère la valeur initiale, le coefficient multiplicateur et l'unité d'une étape. On écrit ensuite $u_n = Cq^n$, puis on interprète u_n dans le contexte.

Exemple Une quantité initiale de 1200 augmente de 4 % par an. On pose u_n sa valeur après n années. Alors $u_0 = 1200$, $q = 1,04$, et

$$u_n = 1200 \times 1,04^n.$$

Vigilance. Le coefficient q n'est pas le taux en pourcentage. Pour une hausse de 4 %, on utilise $q = 1,04$, pas $q = 4$.

⇒ TD N21 – Partie A : reconnaître et exploiter un modèle discret.

2. Modèle continu : fonction exponentielle

Une évolution est dite continue lorsqu'on veut décrire la quantité à tout instant. Le modèle exponentiel continu utilise une fonction de la forme $f(t) = Ce^{kt}$.

Définition (Modèle continu exponentiel) Un modèle continu d'évolution exponentielle est une fonction

$$f(t) = Ce^{kt},$$

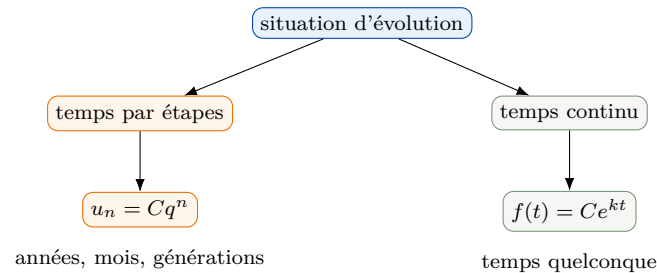
où $C > 0$ est la valeur initiale et k est un réel appelé coefficient de croissance continue.

Propriété (Sens de variation) Pour $f(t) = Ce^{kt}$, avec $C > 0$:

- si $k > 0$, alors f est croissante ;
- si $k < 0$, alors f est décroissante ;
- si $k = 0$, alors f est constante.

Propriété (Vitesse proportionnelle à la quantité)

Si $f(t) = Ce^{kt}$, alors $f'(t) = kf(t)$. La vitesse d'évolution est donc proportionnelle à la quantité présente.



Exemple Une population de bactéries est modélisée par $N(t) = 500e^{0,18t}$, où t est exprimé en heures. On a $N(0) = 500$ et $N'(t) = 0,18N(t)$. Le coefficient 0,18 indique que la vitesse instantanée d'évolution est proportionnelle à la population.

Vigilance. Le paramètre k n'est pas directement un pourcentage d'augmentation sur une unité de temps. Le coefficient multiplicateur sur une unité vaut e^k .

⇒ TD N21 – Partie B : interpréter C , k , le signe de k et la dérivée.

3. Passer du discret au continu

Une suite géométrique peut être vue comme les valeurs, aux temps entiers, d'une fonction exponentielle adaptée.

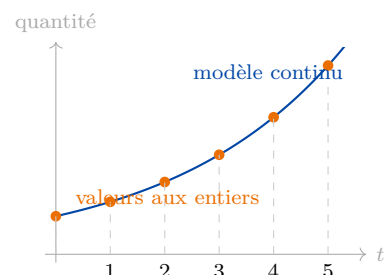
Propriété (Lien entre q^n et e^{kn}) Si $q > 0$, on peut chercher un réel k tel que $e^k = q$. Alors, pour tout entier naturel n ,

$$q^n = (e^k)^n = e^{kn}.$$

Ainsi, la suite $u_n = Cq^n$ peut s'écrire $u_n = Ce^{kn}$.

Méthode Pour associer un modèle continu à une suite géométrique $u_n = Cq^n$, on cherche numériquement un réel k tel que $e^k = q$. On pose alors $f(t) = Ce^{kt}$. Cette fonction vérifie $f(n) = u_n$ pour tout entier n .

Exemple Pour une augmentation de 3 % par an, le modèle discret est $u_n = C \times 1,03^n$. Comme $e^{0,0296} \approx 1,03$, on peut associer le modèle continu $f(t) = Ce^{0,0296t}$, qui coïncide avec la suite aux temps entiers.



	modèle discret	modèle continu
variable	$n \in \mathbb{N}$	$t \in \mathbb{R}_+$
forme	$u_n = Cq^n$	$f(t) = Ce^{kt}$
évolution	$u_{n+1} = qu_n$	$f'(t) = kf(t)$
usage	étapes régulières	évolution à tout instant

Vigilance. Le modèle $C \times 1,03^n$ et le modèle $Ce^{0,03t}$ ne sont pas exactement le même modèle. Pour les faire coïncider aux temps entiers, il faut choisir k tel que $e^k = 1,03$.

⇒ TD N21 – Partie B : comparer suite géométrique et fonction exponentielle.

4. Chercher un seuil

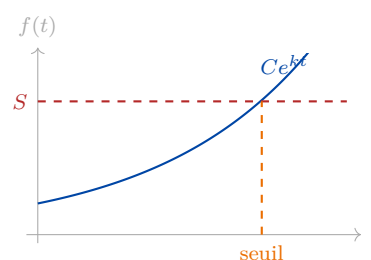
Dans un modèle exponentiel, on cherche souvent quand une quantité dépasse un seuil. En Première, ce type de question se traite souvent par tableau, calculatrice, graphique ou algorithme.

Méthode Pour chercher un seuil dans un modèle discret :

1. identifier le seuil S ;
2. calculer les termes successifs ;
3. s'arrêter dès que $u_n \geq S$ ou $u_n > S$, selon la question ;
4. interpréter le rang obtenu.

Exemple On considère $u_n = 1000 \times 1,05^n$. On cherche le premier rang n tel que $u_n \geq 1500$. On obtient $u_8 \approx 1477$ et $u_9 \approx 1551$. Le premier rang convenable est donc $n = 9$.

```
def seuil_discret(C, q, S):  
    n = 0  
    u = C  
    while u < S:  
        u = q*u  
        n = n + 1  
    return n
```



Méthode Pour un modèle continu $f(t) = Ce^{kt}$, on peut chercher une valeur approchée du seuil par balayage : on augmente t avec un pas choisi jusqu'à ce que $f(t)$ atteigne ou dépasse le seuil.

```
from math import exp  
  
def seuil_continu(C, k, S, pas):  
    t = 0  
    y = C  
    while y < S:  
        t = t + pas  
        y = C*exp(k*t)  
    return t
```

Vigilance. Il faut distinguer « dépasser strictement » et « atteindre ou dépasser ». Les conditions $u < S$ et $u \leq S$ ne donnent pas toujours le même arrêt.

⇒ TD N21 – Partie C : seuils, algorithmes et interprétation du résultat.

5. Choisir et discuter un modèle

Un modèle exponentiel est puissant, mais il ne doit pas être appliqué automatiquement. Il faut vérifier que la situation correspond bien à une évolution multiplicative ou à une vitesse proportionnelle à la quantité.

Définition (Modéliser) Modéliser, c'est choisir une représentation mathématique d'une situation réelle afin de calculer, prévoir ou comparer. Un modèle doit ensuite être interprété et discuté.

Méthode Pour choisir entre discret et continu :

- si les données évoluent par étapes régulières, on privilégie une suite géométrique ;
- si l'on veut décrire une évolution à tout instant, on privilégie une fonction $f(t) = Ce^{kt}$;
- si l'on cherche seulement un dépassement de seuil, un algorithme peut suffire ;
- dans tous les cas, on précise l'unité de temps et le domaine de validité.

Exemple Un capital placé à intérêts composés annuels se modélise naturellement par une suite géométrique. En revanche, une population de bactéries observée en continu peut être modélisée par une fonction exponentielle si sa vitesse de croissance est proportionnelle à la population présente.

Propriété (Limites d'un modèle) Un modèle exponentiel ne décrit correctement une situation que sur une période limitée et sous certaines hypothèses. Il faut donc éviter d'extrapoler trop loin sans vérifier la cohérence du résultat.

Vigilance. Un résultat numérique ne suffit pas. La conclusion doit revenir au contexte : date, unité, seuil atteint ou non, et limites éventuelles du modèle.

6. Synthèse

A RETENIR

- Un modèle discret exponentiel est souvent une suite géométrique $u_n = Cq^n$.
- Une hausse de $t\%$ par étape correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$.
- Un modèle continu exponentiel est une fonction $f(t) = Ce^{kt}$.
- Si $k > 0$, le modèle Ce^{kt} est croissant ; si $k < 0$, il est décroissant.
- Pour $f(t) = Ce^{kt}$, on a $f'(t) = kf(t)$.
- Pour relier Cq^n à un modèle continu, on cherche k tel que $e^k = q$, puis on pose $f(t) = Ce^{kt}$.
- Un seuil peut être cherché par calculs successifs, lecture graphique, calculatrice ou algorithme.
- Toute réponse doit être interprétée avec l'unité de temps et le contexte.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Une quantité vaut 800 et augmente de 2% par an. Écrire u_n .
2. Une quantité vaut 1500 et diminue de 6% par mois. Écrire u_n .
3. Pour $f(t) = 300e^{0,12t}$, donner $f(0)$, le sens de variation et $f'(t)$.
4. Si $e^k = 1,05$, écrire $1000 \times 1,05^n$ sous la forme $1000e^{kn}$.
5. Compléter la condition d'arrêt pour chercher le premier n tel que $u_n \geq 2000$.
6. Expliquer pourquoi $1000 \times 1,03^n$ et $1000e^{0,03t}$ ne décrivent pas exactement le même modèle.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- pourcentage et coefficient multiplicateur ;
- suite géométrique Cq^n ;
- fonction exponentielle Ce^{kt} ;
- dérivée de e^{kt} ;
- seuil avec une boucle `while` ;
- différence entre temps entier et temps continu ;
- interprétation finale dans le contexte.