

OBJECTIFS

- Découvrir la fonction exponentielle comme modèle d'une croissance dont la vitesse est proportionnelle à la quantité.
- Connaître sa définition par $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Utiliser ses propriétés algébriques pour transformer une expression.
- Connaître son signe, son sens de variation et l'allure de sa courbe.
- Dériver une fonction du type $t \mapsto e^{at}$.

ACTIVITE DE DEPART

Une culture de micro-organismes a une masse (en grammes) modélisée par une fonction f dérivable sur $[0; +\infty[$, telle que $f(0) = 1$ et telle qu'à chaque instant, la vitesse de croissance de la masse est égale à la masse elle-même. On donne quelques valeurs approchées de f :

t	0	0,001	1	1,001
$f(t)$	1	1,0010005	2,71828	2,72100

1. Calculer un taux de variation approché de f entre 0 et 0,001, puis entre 1 et 1,001.
2. Comparer chaque résultat à $f(0)$ puis à $f(1)$. Que peut-on conjecturer sur f' ?
3. Rappeler comment évolue une suite géométrique de raison $q > 1$. En quoi f rappelle-t-elle un tel modèle, mais en temps continu ?

1. Une fonction égale à sa dérivée

L'activité suggère l'existence d'une fonction dont le taux de variation, à chaque instant, semble égal à la valeur de la fonction elle-même : une croissance qui s'auto-entretient, comme une suite géométrique en temps continu.

Définition (Fonction exponentielle) Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée *fonction exponentielle*, notée $\exp$.

Vigilance. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises : on ne les démontre pas en Première.

2. Propriétés algébriques et nombre e

Propriété (Relation fonctionnelle) Pour tous réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

De plus, pour tout réel x : $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

On admet cette relation. Elle rappelle la règle $e^{a+b} = e^a \times e^b$ déjà rencontrée pour les suites géométriques (N12), transposée en temps continu.

On note $e = \exp(1) \approx 2,718$. En appliquant la relation fonctionnelle à des entiers, on obtient $\exp(n) = e^n$ pour tout entier n ; on étend cette écriture à tous les réels : pour tout réel x ,

$$\exp(x) = e^x.$$

Méthode Pour transformer une expression contenant des exponentielles, utiliser $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, en repérant précisément les exposants avant de les combiner.

Exemple Pour tout réel x :

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e^{(2x+1)-(x-3)} = e^{x+4}.$$

Vigilance. e^x et $\exp(x)$ désignent le même réel. On utilise $\exp$ pour manipuler la fonction (dérivée, variations) et e^x dans les calculs algébriques.

⇒ TD N20 – Partie A : manipuler les propriétés algébriques.

3. Signe et sens de variation

Propriété (Signe de la fonction exponentielle) Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$.

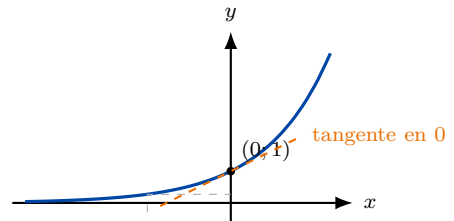
Démonstration Pour tout réel x , la relation fonctionnelle appliquée à $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2}$ donne

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Or $\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \neq 0$, donc $\exp(x) \neq 0$. Ainsi $\exp(x) > 0$.

Propriété (Sens de variation) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\exp' = \exp$ et $\exp(x) > 0$ pour tout x , la dérivée de $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\exp$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (lien signe de la dérivée / variations, N10). On admet de plus que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.



x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp$	0	$+\infty$

⇒ TD N20 – Partie B : étudier signe, variations et courbe.

4. Dérivée de $t \mapsto e^{at}$

Propriété (Dérivée d’une exponentielle de fonction affine) Pour tout réel a , la fonction $t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t :

$$(e^{at})' = a e^{at}.$$

Vigilance. Ce résultat est admis à ce niveau. Ne pas confondre le coefficient a de l’exposant avec un facteur multiplicatif placé devant l’exponentielle.

Méthode Pour dériver une expression du type $k e^{at}$, repérer le coefficient a devant t dans l’exposant, puis multiplier $k e^{at}$ par a .

Exemple La masse d’un échantillon radioactif (en grammes) est modélisée par $f(t) = 5 e^{-0,2t}$, t en années. Alors, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = 5 \times (-0,2) e^{-0,2t} = -e^{-0,2t}.$$

Comme $f'(t) < 0$ pour tout t , la masse est bien décroissante : le modèle est cohérent avec une décroissance radioactive.

⇒ TD N20 – Partie C : dériver et modéliser une évolution exponentielle.

A RETENIR

- $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$; on note $\exp(x) = e^x$.
- $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^x \times e^{-x} = 1$, pour tous réels x, y .
- $e^x > 0$ pour tout réel x ; $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel a : $(e^{at})' = a e^{at}$.

APPLICATIONS IMMEDIATES

1. Simplifier $B = e^3 \times e^{x-3}$.
2. Simplifier $C = \frac{e^{5x}}{e^{2x+1}}$.
3. Donner le signe de $e^x - 1$ selon les valeurs de x (on pourra utiliser la stricte croissance de $\exp$).
4. Dériver $g(t) = 3e^{4t}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Dériver $h(t) = -2e^{-0,5t} + 1$ sur $\mathbb{R}$.
6. Un capital évolue selon $C(t) = 1000 e^{0,03t}$ (t en années). Ce capital est-il croissant ? Justifier.