

N19 Géométrie repérée : droites, cercles, projections et configurations

OBJECTIFS

- utiliser un vecteur normal pour écrire une équation de droite ;
- exploiter une équation cartésienne de droite ;
- déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ;
- écrire et reconnaître une équation de cercle ;
- étudier une configuration dans un repère orthonormé.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Dans un repère orthonormé, on connaît une droite d , un point M et un point fixe Ω .

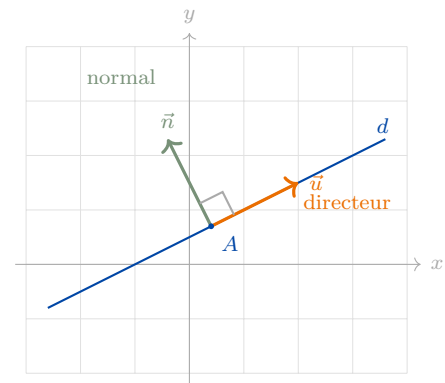
1. Comment tester si un point appartient à d ?
2. Comment trouver le point de d le plus proche de M ?
3. Comment écrire l'ensemble des points situés à distance r de Ω ?

1. Vecteur normal et équation cartésienne de droite

Dans un repère orthonormé, une droite peut être décrite par une direction, mais aussi par une contrainte d'orthogonalité : le vecteur normal.

Définition (Vecteur normal) Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à une droite d lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur directeur de d .

Propriété (Droite et vecteur normal) Dans un repère orthonormé, si une droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d , et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .



Méthode Pour écrire l'équation de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on traduit l'orthogonalité $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.

Exemple La droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ vérifie $3(x - 2) - 2(y + 1) = 0$, donc $3x - 2y - 8 = 0$.

Vigilance. Dans $ax + by + c = 0$, le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite. Un vecteur directeur associé est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

⇒ TD N19 – Partie A : vecteurs normaux et équations cartésiennes.

2. Exploiter une équation de droite

Une équation cartésienne permet de tester une appartenance, de déterminer une position relative et de retrouver des informations géométriques.

Propriété (Appartenance) Soit d la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Un point $M(x_M; y_M)$ appartient à d si et seulement si $ax_M + by_M + c = 0$.

Méthode Pour étudier deux droites $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$, on peut comparer leurs vecteurs normaux $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. S'ils sont colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues ; sinon, elles sont sécantes.

Exemple Pour $d : 2x - 3y + 1 = 0$, le point $A(1;1)$ appartient à d , car $2 - 3 + 1 = 0$. Le point $B(2;1)$ n'appartient pas à d , car $4 - 3 + 1 = 2 \neq 0$.

Les droites $d : 2x - 3y + 1 = 0$ et $d' : -4x + 6y - 5 = 0$ ont des vecteurs normaux colinéaires : elles sont parallèles ou confondues. Comme $A(1;1) \in d$ mais $-4 + 6 - 5 = -3 \neq 0$, elles sont strictement parallèles.

Vigilance. Après avoir reconnu deux droites parallèles, il faut encore distinguer droites strictement parallèles et droites confondues. Tester un point suffit souvent.

⇒ **TD N19 – Partie A : appartenance, parallélisme et intersection de droites.**

3. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Projeter orthogonalement un point M sur une droite d , c'est chercher le point H de d tel que $MH \perp d$. C'est aussi le point de d le plus proche de M .

Définition (Projeté orthogonal) Soit d une droite et M un point. Le projeté orthogonal de M sur d est le point $H \in d$ tel que $(MH) \perp d$.

Méthode Pour déterminer le projeté orthogonal de M sur une droite $d : ax + by + c = 0$, on utilise le fait que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d . On cherche H sous la forme $H = M + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, puis on impose $H \in d$.

Propriété (Formule du projeté) Soit $d : ax + by + c = 0$ et $M(x_M; y_M)$. En posant $s = ax_M + by_M + c$, le projeté orthogonal $H(x_H; y_H)$ de M sur d est donné par

$$x_H = x_M - \frac{as}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y_H = y_M - \frac{bs}{a^2 + b^2}.$$

Exemple On projette $M(4;1)$ sur $d : 2x - y - 3 = 0$. Ici $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$, donc $s = 2 \times 4 - 1 - 3 = 4$ et $a^2 + b^2 = 5$. Ainsi $x_H = 4 - \frac{2 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$ et $y_H = 1 - \frac{(-1) \times 4}{5} = \frac{9}{5}$. Donc $H\left(\frac{12}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Vigilance. La formule utilise l'orthogonalité usuelle : le repère doit être orthonormé. Dans la rédaction, on vérifie que $H \in d$ et que $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à un vecteur normal de d .

⇒ **TD N19 – Partie B : projetés orthogonaux et distance à une droite.**

4. Équation d'un cercle

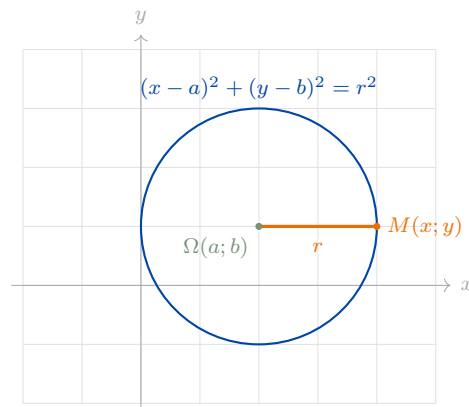
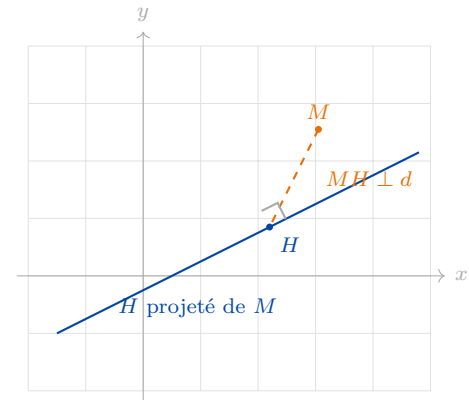
Un cercle est l'ensemble des points situés à une distance fixée d'un point fixe. Dans un repère orthonormé, la formule de distance donne directement son équation.

Définition (Cercle) Le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\Omega M = r$.

Propriété (Équation réduite) Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Méthode Pour écrire une équation de cercle, on identifie le centre $(a;b)$ et le rayon r , puis on remplace dans $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Pour tester l'appartenance d'un point, on remplace x et y par ses coordonnées.



Exemple Le cercle de centre $\Omega(3; -2)$ et de rayon 4 a pour équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Le point $A(7; -2)$ appartient à ce cercle, car $(7 - 3)^2 + (-2 + 2)^2 = 16$.

Vigilance. Dans $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$, le centre est $(3; -2)$, pas $(3; 2)$. Les signes se lisent dans les parenthèses.

⇒ TD N19 – Partie B : équations de cercles et appartenance.

5. Reconnaître une équation de cercle

Certaines équations sont données sous forme développée. Pour reconnaître un cercle, on revient à la forme réduite en complétant des carrés.

Propriété (Reconnaissance) Une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se transforme en

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma.$$

Si le membre de droite est strictement positif, l'ensemble des solutions est un cercle.

Méthode Pour reconnaître un cercle, on regroupe les termes en x et en y , on complète les carrés, puis on lit le centre et le rayon si le rayon au carré obtenu est strictement positif.

Exemple On considère $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2,25 = 0$. Or $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ et $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$. Donc $(x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 - 2,25 = 0$, c'est-à-dire $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 7,25$. C'est le cercle de centre $(2; -1)$ et de rayon $\sqrt{7,25} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vigilance. La présence de $x^2 + y^2$ ne suffit pas. Si le rayon au carré obtenu est négatif, l'équation ne définit aucun cercle réel.

⇒ TD N19 – Partie C : compléter des carrés et reconnaître un cercle.

6. Étudier une configuration dans un repère

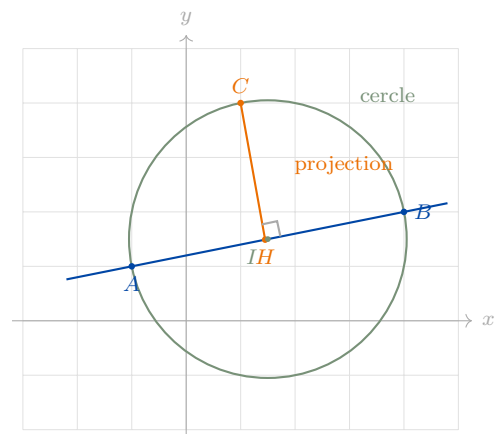
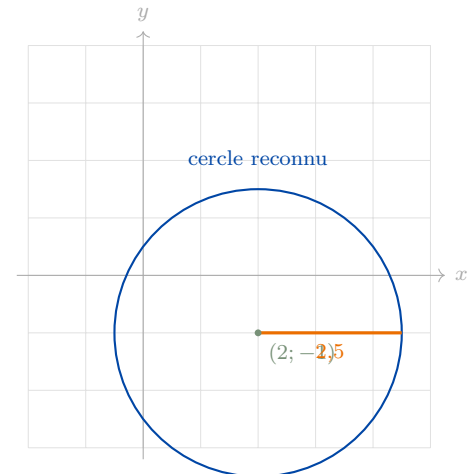
La géométrie repérée permet de transformer une question géométrique en calculs contrôlables. L'essentiel est de choisir l'outil adapté.

Méthode Pour étudier une configuration dans un repère orthonormé :

1. identifier les objets : points, droites, cercles, distances, angles ;
2. choisir l'outil : vecteurs, produit scalaire, équations de droites, projection ou cercle ;
3. effectuer les calculs ;
4. traduire le résultat en conclusion géométrique.

Exemple Soient $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $M(x; y)$. Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M . Le centre du cercle est $I(3; 0)$ et son rayon vaut 3, donc l'équation du cercle est $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

Exemple L'ensemble des points équidistants de $A(0; 0)$ et $B(6; 0)$ vérifie $MA = MB$. En passant aux carrés des distances, on obtient $x^2 + y^2 = (x - 6)^2 + y^2$, donc $x = 3$. C'est la médiatrice de $[AB]$.



Propriété (Choix de méthode) Une équation de droite est efficace pour une appartenance, un parallélisme ou une intersection ; une équation de cercle pour une distance fixée ; un projeté orthogonal pour une distance à une droite ; un produit scalaire pour une orthogonalité ou un angle.

Vigilance. Une figure aide à conjecturer, mais elle ne démontre pas. En géométrie repérée, la conclusion doit s'appuyer sur un calcul ou une propriété clairement identifiée.

⇒ **TD N19 – Partie D : choisir une méthode dans une configuration repérée.**

7. Synthèse

A RETENIR

- Une droite $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Un vecteur directeur associé à cette droite est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Une droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
- Le projeté orthogonal d'un point sur une droite se cherche dans la direction d'un vecteur normal.
- Le cercle de centre $(a; b)$ et de rayon r a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Pour reconnaître un cercle, on complète les carrés et on vérifie que le rayon au carré est positif.
- Dans une configuration repérée, le choix de la méthode est aussi important que le calcul.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $d : 3x - 2y + 5 = 0$.
2. Écrire une équation de la droite passant par $A(1; -2)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Tester si $M(2; 3)$ appartient à $2x - y - 1 = 0$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de $M(4; 1)$ sur $2x - y - 3 = 0$.
5. Écrire l'équation du cercle de centre $(-1; 3)$ et de rayon 5.
6. Reconnaître l'ensemble défini par $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- distinguer vecteur directeur et vecteur normal ;
- remplacer les coordonnées d'un point dans une équation ;
- utiliser la direction normale pour projeter ;
- compléter un carré ;
- lire correctement le centre d'un cercle ;
- rédiger une conclusion géométrique après un calcul.

⇒ **TD N19 – Toutes les parties : droites, projections, cercles et configurations.**