

N18 Produit scalaire II : identités, Al-Kashi, longueurs, angles et lieux

OBJECTIFS

- transformer des expressions avec la bilinéarité du produit scalaire ;
- utiliser les identités de norme ;
- démontrer et appliquer la formule d'Al-Kashi ;
- calculer des longueurs et des angles ;
- reconnaître des lieux géométriques définis par un produit scalaire.

ACTIVITÉ DE DÉPART

Dans un triangle quelconque ABC , on connaît deux côtés AB , AC et l'angle $\hat{A}$. On cherche à calculer le troisième côté BC .

1. Que donnerait le théorème de Pythagore si l'angle était droit ?
2. Pourquoi ce théorème ne suffit-il plus ici ?
3. Comment le produit scalaire peut-il tenir compte de l'angle ?

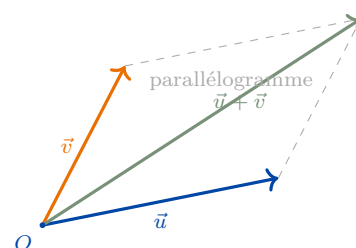
1. Identités avec le produit scalaire

Le produit scalaire permet de relier des longueurs et des angles. Pour cela, on utilise la norme d'une somme ou d'une différence de vecteurs.

Propriété (Identités de norme) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$



Méthode Pour transformer une expression comme $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, on l'écrit sous la forme $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, puis on utilise la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Exemple Si $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 25 + 2 \times 4 + 9 = 42.$$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{42}$.

Propriété (Identité de polarisation) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Vigilance. On ne dit pas que le produit scalaire « se développe comme un produit algébrique ». On utilise la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

⇒ **TD N18 – Partie A : transformer des expressions avec le produit scalaire.**

2. Formule d'Al-Kashi

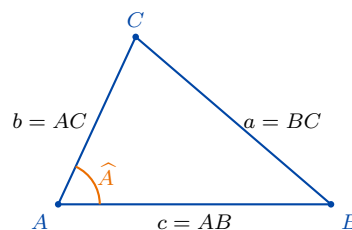
Dans un triangle ABC , on note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. La formule d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore aux triangles quelconques.

Théorème (Formule d'Al-Kashi) Dans un triangle ABC ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}).$$

Avec les notations $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, on écrit aussi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}).$$



Propriété (Démonstration) On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. Donc

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2.$$

Avec l'identité de norme,

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Or l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\hat{A}$, donc

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos(\hat{A}).$$

Ainsi,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}).$$

Exemple Si $AB = 6$, $AC = 5$ et $\hat{A} = 60^\circ$, alors

$$BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos 60^\circ = 36 + 25 - 60 \times \frac{1}{2} = 31.$$

Donc $BC = \sqrt{31}$.

Vigilance. Dans Al-Kashi, le cosinus concerne l'angle compris entre les deux côtés connus. Il faut repérer le bon angle avant de remplacer dans la formule.

⇒ **TD N18 – Partie B : appliquer Al-Kashi pour calculer une longueur.**

3. Calculer un angle ou une longueur

La formule avec le cosinus permet aussi de retrouver un angle lorsque les trois longueurs d'un triangle sont connues.

Méthode Pour calculer un angle dans un triangle, on isole le cosinus dans la formule d'Al-Kashi. Par exemple :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC}.$$

On utilise ensuite la calculatrice en mode degré ou radian selon la consigne.

Exemple Soit un triangle ABC tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Alors

$$\cos(\hat{A}) = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{49 + 25 - 64}{70} = \frac{1}{7}.$$

Donc $\hat{A} \approx 81,8^\circ$.

Méthode Pour choisir une méthode :

- dans un triangle rectangle, penser d'abord à Pythagore ou à la trigonométrie ;
- dans un triangle quelconque avec deux côtés et l'angle compris, utiliser Al-Kashi pour calculer le troisième côté ;
- dans un triangle quelconque avec trois côtés, utiliser Al-Kashi pour calculer un angle.

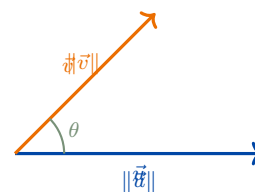
Exemple Si $AB = 4$, $AC = 9$ et $\hat{A} = 120^\circ$, alors

$$BC^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \times 4 \times 9 \times \cos 120^\circ = 16 + 81 - 72 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 133.$$

Donc $BC = \sqrt{133}$.

Vigilance. Un cosinus négatif correspond à un angle obtus. C'est normal dans un triangle : un angle peut être supérieur à 90° .

⇒ **TD N18 – Partie B : calculer des angles et choisir une méthode.**



4. Lieu : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

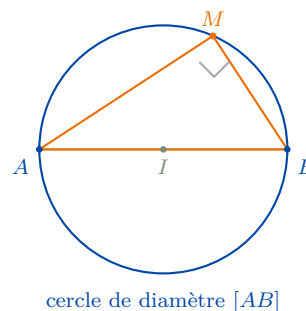
On fixe deux points distincts A et B . On cherche l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Théorème (Cercle de diamètre $[AB]$) Pour un point M distinct de A et B ,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M .
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est donc le cercle de diamètre $[AB]$, avec A et B inclus.



Propriété (Démonstration par le produit scalaire) Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux. Cela signifie que les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires. Donc le triangle AMB est rectangle en M . D'après le théorème du cercle de diamètre, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple Si $A(-2;0)$ et $B(2;0)$, alors le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $O(0;0)$ et pour rayon 2. Les points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ vérifient donc $x^2 + y^2 = 4$.

Vigilance. L'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ utilise deux vecteurs d'origine M . Le point M varie : c'est lui qui décrit le lieu géométrique.

⇒ **TD N18 – Partie C : reconnaître le cercle de diamètre $[AB]$.**

5. Transformer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Soit I le milieu de $[AB]$. On peut exprimer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en fonction de MI et de AB .

Propriété (Expression avec le milieu) Si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point M ,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Propriété (Démonstration) On écrit

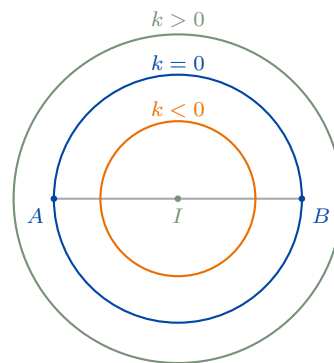
$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.$$

Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 - \|\overrightarrow{IA}\|^2.$$

Or $IA = \frac{AB}{2}$, donc

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$



Méthode Pour étudier un lieu défini par $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, on remplace par

$$MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k.$$

On obtient alors $MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$. Si le second membre est positif, le lieu est un cercle de centre I .

Exemple Si $AB = 6$, alors $\frac{AB^2}{4} = 9$. L'équation

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$$

devient $MI^2 - 9 = 7$, donc $MI^2 = 16$. Le lieu est le cercle de centre I et de rayon 4.

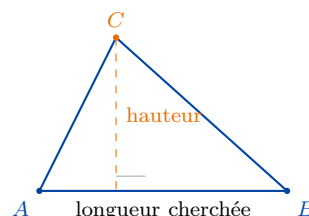
Vigilance. Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$, il n'existe aucun point M , car une distance au carré ne peut pas être négative.

⇒ **TD N18 – Partie C : transformer une condition et identifier un lieu.**

6. Utiliser le produit scalaire dans un problème géométrique

Méthode Dans un problème géométrique, on choisit la forme du produit scalaire selon la question :

- pour une orthogonalité : viser un produit scalaire nul ;
- pour une longueur : utiliser une identité de norme ou Al-Kashi ;
- pour un angle : isoler un cosinus ;
- pour un lieu : transformer l'expression avec un point fixe, souvent le milieu d'un segment.



Exemple Dans un triangle ABC , si $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 6$, alors

$$\cos(\hat{A}) = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

On peut donc déterminer l'angle $\hat{A}$, puis utiliser cette information dans une question de configuration.

Méthode Pour rédiger proprement, annoncer les objets utilisés : « On applique Al-Kashi dans le triangle ABC », ou « On calcule $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en introduisant I , milieu de $[AB]$ ». La conclusion doit revenir à la question : longueur, angle, orthogonalité ou lieu.

Vigilance. Une formule ne remplace pas la rédaction. En géométrie, il faut préciser le triangle, les points fixes, le point variable et la conclusion géométrique obtenue.

⇒ **TD N18 – Partie D : problèmes géométriques avec choix de méthode.**

7. Synthèse

A RETENIR

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- Dans un triangle ABC , $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$.
- La formule d'Al-Kashi permet de calculer une longueur ou un angle dans un triangle quelconque.
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ caractérise le cercle de diamètre $[AB]$.
- Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

APPLICATIONS IMMÉDIATES

1. Si $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.
2. Dans un triangle ABC , $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60^\circ$. Calculer BC .
3. Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 9$. Calculer $\cos(\hat{A})$.

BESOIN D'UNE REPRISE ?

À retravailler en priorité :

- bilinéarité et symétrie du produit scalaire ;
- identités de norme ;
- calculs avec Al-Kashi ;
- passage longueur $\leftrightarrow$ angle ;
- cercle de diamètre ;

transformation avec le milieu d'un segment.

⇒ **TD N18 – Toutes les parties : identités, Al-Kashi, longueurs, angles et lieux.**